

tiene números iguales de iones cargados positivamente y electrones cargados negativamente. Las fuertes interacciones eléctricas que se dan con el entorno y entre los átomos hacen que su comportamiento sea bastante diferente al de un gas ordinario. El gas que hay dentro de una lámpara fluorescente se convierte en plasma cuando la lámpara se enciende. En una escala mucho más grande, el Sol y las demás estrellas son bolas de plasma y, así, mucha de la materia del Universo existe en esta forma. Crear y confinar plasmas de tamaño suficiente en el laboratorio son los obstáculos principales que encaran los investigadores que buscan maneras de aprovechar las reacciones de la fusión controlada para generar energía eléctrica.

Microscópicamente, ¿cómo difieren estas formas de materia unas de otras? Los sólidos son capaces de soportar una variedad de esfuerzos, como ya hemos visto en el capítulo 14. Estos esfuerzos incluyen la tensión, la compresión y el corte, entre otros. Los sólidos pueden soportar y transmitir tales esfuerzos debido a que existen fuerzas relativamente fuertes entre sus moléculas y porque tienen un *orden de largo alcance*, es decir, sus moléculas están dispuestas de manera ordenada, como los tabiques en una pared, de modo que no se puede desplazar a un átomo fácilmente de un lugar sin desplazar también a muchos otros átomos.

En los líquidos, las distancias intermoleculares son generalmente más grandes que en los sólidos; de aquí que las fuerzas intermoleculares, que varían fuertemente con la distancia, tiendan a ser más débiles en los líquidos que en los sólidos. Muchos líquidos son, como los sólidos, relativamente incompresibles, de modo que los líquidos soportan y transmiten esfuerzos de compresión; como lo veremos más adelante en este capítulo, los sistemas hidráulicos dependen de esta propiedad de los fluidos. Hasta un grado limitado, los líquidos pueden soportar también esfuerzos de tensión, lo cual estudiaremos en la sección 17-6. Sin embargo, los líquidos no pueden soportar esfuerzos cortantes porque las capas del líquido se deslizan entre sí con gran facilidad.

En los gases, las moléculas interactúan sólo débilmente, por lo que son incapaces de transmitir esfuerzos estáticos de tensión o de corte; así, son por lo general mucho más compresibles que los sólidos o los líquidos. Sin embargo, en un plasma existen fuerzas electromagnéticas de largo alcance entre las partículas. Por lo tanto, si bien un plasma parece hallarse en estado gaseoso tiene mayor similitud con un líquido en su capacidad para transmitir esfuerzos.

Hemos desarrollado un grupo de leyes mecánicas que nos permiten analizar la dinámica de partículas individuales, y hemos desarrollado también otro grupo similar de leyes que nos permiten analizar la dinámica de conjuntos de partículas en sólidos rígidos. Es importante observar que lo hicimos aun sin una teoría que explicase las fuerzas entre las partículas de que está compuesto un sólido. Aun

para el caso de los sólidos que no pueden ser considerados como perfectamente rígidos, tenemos una teoría de la elasticidad (véase el capítulo 14).

La mecánica de los fluidos adquiere un planteamiento similar. Al igual que la mecánica de los cuerpos rígidos, la primera se deriva de las leyes de Newton. Para los fluidos, como para los sólidos, es conveniente desarrollar una formulación especial de estas leyes.

17-2 PRESIÓN Y DENSIDAD

Presión

A un sólido podemos aplicarle una fuerza a un ángulo arbitrario con su superficie. En la sección 14-5 hemos considerado el efecto del esfuerzo cortante sobre un sólido, donde la fuerza actúa en el plano de un elemento de área de la superficie. La capacidad de fluir hace que el fluido sea incapaz de soportar un esfuerzo cortante, y en condiciones estáticas la única componente de la fuerza que debe tomarse en cuenta es la que actúa en forma *normal* o *perpendicular* a la superficie del fluido. Sin importar cuál sea la forma del fluido, las fuerzas entre el interior y el exterior actúan en todas partes en ángulo recto con las capas frontera del fluido.

La magnitud de la fuerza normal por unidad de área superficial se llama *presión*. La presión es una cantidad escalar; no tiene propiedades direccionales. Por ejemplo, cuando nadamos bajo el agua ésta ejerce una presión sobre nuestro cuerpo en todas direcciones. Incluso si la presión es producida por una fuerza que tiene propiedades direccionales y es un vector, la presión es, en sí misma, un escalar.

Microscópicamente, la presión ejercida por un fluido sobre una superficie en contacto con él es causada por colisiones de moléculas del fluido con la superficie. Como resultado de una colisión, la componente del ímpetu de una molécula perpendicular a la superficie se invierte. La superficie debe ejercer una fuerza impulsiva sobre la molécula y, según la tercera ley de Newton, las moléculas ejercen una fuerza igual perpendicular a la superficie. El resultado neto de la fuerza de reacción ejercida por muchas moléculas sobre la superficie da origen a la presión en la superficie. En el capítulo 23 desarrollaremos este cuadro más cuantitativamente para el caso de los gases.

Un fluido sometido a presión ejerce una fuerza hacia afuera sobre cualquier superficie que esté en contacto con él. Consideremos una superficie cerrada que contenga a un fluido, como en la figura 1. El fluido que está dentro de la superficie empuja al entorno. Un elemento pequeño de la superficie puede estar representado por el vector ΔA , cuya magnitud es numéricamente igual al elemento de

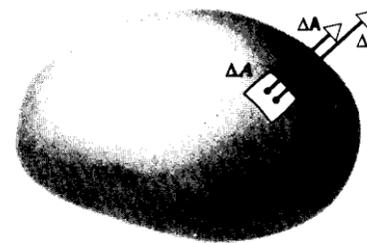


Figura 1 Un elemento de superficie ΔA puede ser representado por un vector ΔA de longitud igual a la magnitud del área del elemento y dirección perpendicular al elemento. El fluido encerrado por la superficie ejerce una fuerza ΔF contra el elemento. La fuerza es perpendicular al elemento y por lo tanto paralela a ΔA .

área y cuya dirección es a lo largo de la normal a la superficie hacia afuera. La fuerza ΔF ejercida por el fluido contra esta superficie depende de la presión p de acuerdo con

$$\Delta F = p \Delta A. \quad (1)$$

Puesto que los vectores que representan a la fuerza y al área son paralelos, podemos escribir la presión en términos de la relación escalar

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (2)$$

Tomamos al elemento ΔA como lo suficientemente pequeño para que la presión p definida según la ecuación 2 sea independiente del tamaño del elemento. En general, la presión puede variar de un punto a otro de la superficie.

La presión tiene las dimensiones de fuerza dividida por área, y una unidad común para la presión es N/m^2 . Esta unidad se denomina *pascal* (abreviatura Pa; $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$) en el SI. Puede encontrarse una amplia variedad de otras unidades. En Estados Unidos los medidores de la presión en las llantas de los vehículos dan una lectura en lb/in^2 . La presión ejercida por la atmósfera de la Tierra al nivel del mar se designa como 1 atmósfera (atm; $1 \text{ atm} = 14.7 \text{ lb/in}^2 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$, exactamente). Debido a que el pascal es una unidad pequeña ($1 \text{ Pa} \approx 10^{-5} \text{ atm}$), los pronosticadores del tiempo usan a menudo la unidad bar ($1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$, o 1 atm aproximadamente) para expresar la presión atmosférica. Otra unidad común se basa en la presión ejercida en su base por una columna vertical de mercurio de una altura específica; una columna de 760 mm de altura a una temperatura de 0°C en una localidad donde $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ ejerce una presión igual a la de la atmósfera, y así tenemos la equivalencia de $760 \text{ mm Hg} = 1 \text{ atm}$. La altura de esta columna en pulgadas es de 29.9 in; en Estados Unidos, los barómetros comunes (y los pronosticadores del tiempo en la TV) dan la presión atmosférica en pulgadas de mercurio. Las lecturas de

presión en el laboratorio se expresan a menudo en la unidad *torr*, que es la presión ejercida por una columna de mercurio de 1 mm de altura bajo las condiciones especificadas.

La tabla 1 da algunas presiones representativas en unidades pascal. El término "sobrepresión" indica un valor excesivo de la presión atmosférica normal. Obsérvese que en el laboratorio podemos producir presiones que varían dentro de 22 órdenes de magnitud. En el apéndice G el lector hallará los factores de conversión necesarios para convertir las mediciones de la presión de un grupo de unidades a otro.

Densidad

La densidad ρ de un elemento pequeño de cualquier material es la masa Δm del elemento dividida entre su volumen ΔV :

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}. \quad (3)$$

La densidad en un punto es el valor límite de esta razón cuando el elemento de volumen se hace pequeño. La densidad no tiene propiedades direccionales y es un escalar.

Si la densidad de un objeto tiene el mismo valor en todos los puntos, la densidad del objeto es igual a la masa de todo el objeto dividida por su volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (4)$$

La densidad de un material en general depende de factores ambientales, incluyendo la presión y la temperatura. En los líquidos y en los sólidos, la variación de la densidad es muy pequeña dentro de intervalos grandes de presión y de temperatura, y en muchas aplicaciones podemos considerar a la densidad como una constante. La

TABLA 1 ALGUNAS PRESIONES

Sistema	Presión (Pa)
Centro del Sol	2×10^{16}
Centro de la Tierra	4×10^{11}
Mayor presión sostenida en el laboratorio	1.5×10^{10}
La fosa oceánica más profunda	1.1×10^8
Tacones puntiagudos sobre una pista de baile	2×10^7
Llanta de automóvil (sobrepresión)	2×10^5
Atmósfera al nivel del mar	1.0×10^5
Presión normal de la sangre [†]	1.6×10^4
El sonido más fuerte tolerable [‡]	30
El sonido más débil detectable [‡]	3×10^{-5}
El mejor vacío en el laboratorio	10^{-12}

[†] La sobrepresión sistólica, correspondiente a 120 mm Hg en el esfigmomanómetro del médico.

[‡] Sobrepresión en el tímpano del oído, a 1000 Hz.

TABLA 2 ALGUNAS DENSIDADES

Material u objeto	Densidad (kg/m ³)
Espacio interestelar	10 ⁻²⁰
El mejor vacío en el laboratorio	10 ⁻¹⁷
Aire: 20° C y 1 atm	1.21
20° C y 50 atm	60.5
Espuma de estireno	1 × 10 ²
Hielo	0.917 × 10 ³
Agua: 20° C y 1 atm	0.998 × 10 ³
20° C y 50 atm	1.000 × 10 ³
Agua de mar: 20° C y 1 atm	1.024 × 10 ³
Sangre entera	1.060 × 10 ³
Hierro	7.8 × 10 ³
Mercurio	13.6 × 10 ³
La Tierra: promedio	5.5 × 10 ³
núcleo	9.5 × 10 ³
corteza	2.8 × 10 ³
El Sol: promedio	1.4 × 10 ³
núcleo	1.6 × 10 ⁵
Estrella enana blanca (núcleo)	10 ¹⁰
Núcleo del uranio	3 × 10 ¹⁷
Estrella de neutrones (núcleo)	10 ¹⁸
Hoyo negro (1 masa solar)	10 ¹⁹

tabla 2 presenta algunas densidades representativas, que varían en alrededor de 21 órdenes de magnitud en el laboratorio y en casi 40 órdenes de magnitud desde los objetos más densos del Universo (un hoyo negro hipotético) hasta el casi vacío del espacio mismo.

En analogía con la exposición del concepto esfuerzo contra deformación unitaria de la sección 14-5, un cambio Δp en la presión aplicada a cualquier material es un esfuerzo. La deformación unitaria correspondiente es un cambio de volumen, el cual escribimos como: $\Delta V/V$. La relación entre esfuerzo y deformación unitaria se llama **módulo volumétrico B**:

$$B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad (5)$$

En esta definición se inserta el signo menos para que B sea una cantidad positiva, porque Δp y ΔV tienen signos opuestos. Esto es, un *aumento* de presión ($\Delta p > 0$) causa una *disminución* de volumen ($\Delta V < 0$). Obsérvese que B tiene la misma dimensión que la presión, porque $\Delta V/V$ es una cantidad sin dimensión.

Si el módulo volumétrico de un material es grande, entonces (según la Ec. 5) un cambio grande de presión Δp produce únicamente un cambio pequeño en su volumen. En este caso, podemos considerar al material como si fuese prácticamente incompresible. El módulo volumétrico del agua, por ejemplo, es de $2.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. A la presión en el fondo del Océano Pacífico ($4.0 \times 10^7 \text{ N/m}^2$, alrededor de 400 atm), el cambio relativo de volumen causado por la presión es de sólo 1.8%. Los sólidos tienen por lo general módulos volumétricos más elevados que los líquidos, a causa del acoplamiento mayor de los átomos en los

sólidos. Una presión dada produce entonces un cambio más pequeño en el volumen de un sólido que en el de un líquido. En circunstancias ordinarias, podemos por tanto considerar como incompresibles tanto a los sólidos como a los líquidos.

Si B es pequeño, el volumen puede ser cambiado por un cambio de presión modesto, y se dice que el material es compresible. Los gases típicos tienen módulos volumétricos de alrededor de 10^5 N/m^2 . Un pequeño cambio de presión de 0.1 atm puede cambiar el volumen de un gas en un 10%. Así, los gases son fácilmente compresibles.

17-3 VARIACIÓN DE LA PRESIÓN EN UN FLUIDO EN REPOSO

Si un fluido está en equilibrio, cada porción del fluido está en equilibrio. Es decir, tanto la fuerza neta como la torca neta sobre cada elemento del fluido debe ser cero. Consideremos un pequeño elemento de volumen del fluido sumergido dentro del cuerpo del fluido. Consideremos que este elemento tenga la forma de un disco delgado y esté a una distancia y arriba de algún nivel de referencia, como se muestra en la figura 2a. El espesor del disco es dy y cada cara tiene un área A . La masa de este elemento es $dm = \rho dV = \rho A dy$, y su peso es $(dm)g = \rho g A dy$. Las fuerzas ejercidas sobre el elemento por el fluido que lo rodea son perpendiculares a su superficie en cada punto (Fig. 2b).

La fuerza horizontal resultante es cero porque el elemento no tiene aceleración horizontal. Las fuerzas horizontales se deben únicamente a la presión del fluido, y por simetría la presión debe ser la misma en todos los puntos comprendidos en un plano horizontal en y .

El elemento de fluido no estará acelerado en dirección vertical, de modo que la fuerza vertical resultante sobre él debe ser cero. En la figura 2c se muestra un diagrama de cuerpo libre del elemento de fluido. Las fuerzas verticales son debidas no sólo a la presión del fluido que lo rodea en sus caras, sino también al peso del elemento. Si tomamos a p como la presión en la cara inferior y $p + dp$ como la presión en su cara superior, la fuerza hacia arriba es pA , y las fuerzas hacia abajo son $(p + dp)A$ y el peso del elemento $(dm)g = \rho g A dy$. De aquí que, para el equilibrio vertical,

$$\sum F_y = pA - (p + dp)A - \rho g A dy = 0,$$

de donde obtenemos

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g. \quad (6)$$

Esta ecuación nos dice cómo varía la presión con la elevación sobre cierto nivel de referencia en un fluido en

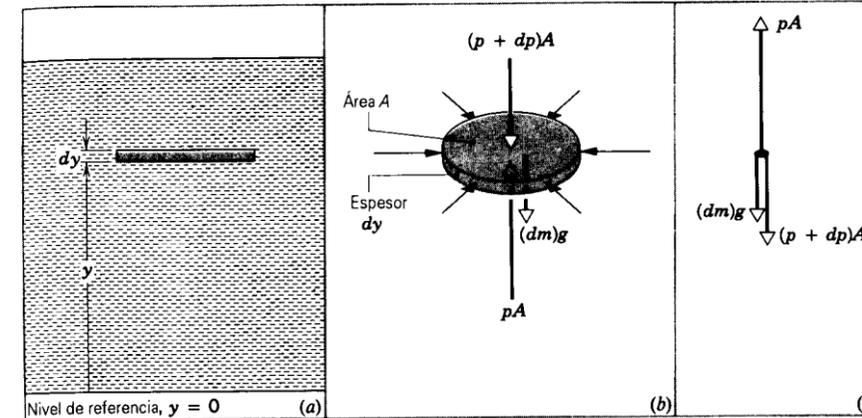


Figura 2 (a) Un pequeño elemento de volumen del fluido en reposo. (b) Las fuerzas sobre el elemento. (c) Diagrama de cuerpo libre del elemento.

equilibrio estático. Al aumentar la elevación (dy positiva), la presión disminuye (dp negativa). La causa de la variación de esta presión es el peso por unidad de área de la sección transversal de las capas de fluido que están entre los puntos cuya diferencia de presión está siendo medida.

La cantidad ρg suele llamarse *peso específico* del fluido; y es el peso por unidad de volumen del fluido. Por ejemplo, para el agua, el peso específico es $9800 \text{ N/m}^3 = 62.4 \text{ lb/ft}^3$.

Si p_1 es la presión en la elevación y_1 , y p_2 es la presión en la elevación y_2 sobre algún nivel de referencia, la integración de la ecuación 6 da

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy$$

o sea

$$p_2 - p_1 = - \int_{y_1}^{y_2} \rho g dy. \quad (7)$$

En los líquidos, que son casi incompresibles, ρ es prácticamente constante, y las diferencias de nivel raramente son tan grandes que haya de considerarse algún cambio en g . Así pues, tomando a ρ y a g como constantes, obtenemos

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \quad (8)$$

para un líquido homogéneo.

Si un líquido tiene una superficie libre, ésta es el nivel natural desde el cual se miden las distancias (Fig. 3). Sea y_2 la elevación de la superficie, en cuyo punto la presión p_2 que actúa sobre el fluido es usualmente la ejercida por la atmósfera de la Tierra p_0 . Consideramos que y_1 está en cualquier nivel del fluido, y representamos a la presión de ese lugar como p . Entonces,

$$p_0 - p = -\rho g(y_2 - y_1).$$

Pero $y_2 - y_1$ es la profundidad h bajo la superficie a la cual la presión es p (véase la Fig. 3), de modo que

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (9)$$

Esto demuestra claramente que en un líquido la presión aumenta con la profundidad, pero es la misma en todos los puntos situados a la misma profundidad. El segundo término a la derecha de la ecuación 9 da la contribución a la presión en un punto del líquido debida al peso del fluido de altura h sobre ese punto.

La ecuación 8 da la relación entre las presiones en dos puntos cualesquiera de un fluido, sin que importe la forma de la vasija que lo contiene. Al no importar la forma de la vasija que lo contiene, dos puntos del fluido pueden estar unidos por una trayectoria hecha de etapas verticales y horizontales. Por ejemplo, consideremos los puntos A y B en el líquido homogéneo contenido en el tubo en forma de U de la figura 4a. A lo largo de la trayectoria en zigzag de A a B existe una diferencia de presión $\rho g y'$ en cada segmento vertical de longitud y' , mientras que a lo largo de cada segmento horizontal no existe un cambio de presión. De aquí que la diferencia de presión $p_B - p_A$ sea ρg veces la suma algebraica de los segmentos verticales desde A hasta B , o $\rho g(y_2 - y_1)$.

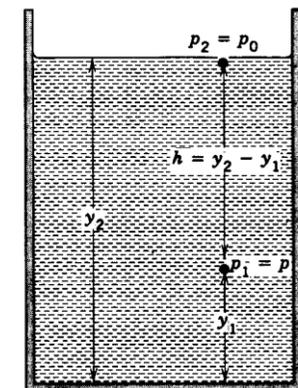


Figura 3 Un recipiente contiene un líquido cuya superficie superior está abierta a la atmósfera. La presión en cualquier punto del líquido depende de la profundidad h .

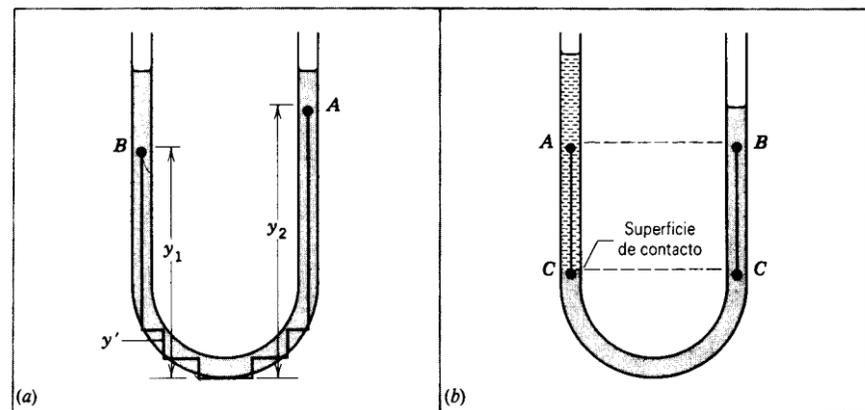


Figura 4 (a) La diferencia de presión entre dos puntos A y B de un líquido homogéneo depende únicamente de su diferencia en altura $y_2 - y_1$. (b) Dos puntos A y B a la misma altura pueden estar a diferentes presiones si ahí las densidades difieren.

Si el tubo en U contiene líquidos inmiscibles diferentes, digamos, un líquido denso en el tubo de la derecha y otro menos denso en el tubo de la izquierda, como se muestra en la figura 4b, la presión puede ser diferente en un mismo nivel (puntos A y B) en lados diferentes. El líquido bajo la línea CC está en equilibrio, entonces, la fuerza ejercida por la columna de la izquierda sobre C debe ser igual a la fuerza ejercida por la columna de la derecha sobre C. La presión en C es la misma en ambos lados, pero la presión decae menos desde C hasta A que desde C hasta B, porque el líquido a la izquierda es menos denso que el líquido a la derecha. Entonces, la presión en A es mayor que en B.

Variación de la presión en la atmósfera

Para los gases, ρ es comparativamente pequeña y la diferencia de presión entre dos puntos vecinos suele ser despreciable (véase la Ec. 8). Entonces en una vasija razonablemente pequeña que contenga un gas, la presión puede ser considerada como la misma en cualquier parte. Sin embargo, éste no es el caso cuando $y_2 - y_1$ es muy grande. La presión del aire varía notablemente cuando ascendemos a grandes alturas en la atmósfera. Además, la densidad ρ varía con la altitud, y ρ debe ser conocida en función de y antes de que podamos integrar la ecuación 7.

Podemos obtener una idea razonable de la variación de la presión con la altitud en la atmósfera de la Tierra si suponemos que la densidad ρ es proporcional a la presión. Esto sería así de manera muy aproximada (de acuerdo con la ley del gas ideal, la cual estudiaremos en el capítulo 23) si la temperatura del aire permaneciese igual en todas las altitudes. Haciendo uso de esta hipótesis, y suponiendo también que la variación de g con la altitud sea despreciable, podemos hallar la presión p a cualquier altitud y sobre el nivel del mar.

Partiendo de la ecuación 6 tenemos que

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g.$$

Puesto que ρ es proporcional a p , tenemos

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}, \tag{10}$$

donde ρ_0 y p_0 son los valores de la densidad y de la presión al nivel del mar. Entonces,

$$\frac{dp}{dy} = -g\rho_0 \frac{p}{p_0},$$

de modo que

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0} dy. \tag{11}$$

Integrando la ecuación 11 desde la presión p_0 a una altitud $y = 0$ (nivel del mar) hasta la presión p a una altitud y , obtenemos

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^y \frac{g\rho_0}{p_0} dy,$$

lo cual da

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g\rho_0}{p_0} y$$

o sea

$$p = p_0 e^{-(g\rho_0/p_0)y}. \tag{12}$$

Usando los valores $g = 9.80 \text{ m/s}^2$, $\rho_0 = 1.21 \text{ kg/m}^3$ (a 20°C), y $p_0 = 1.01 \times 10^5 \text{ Pa}$, obtenemos

$$\frac{g\rho_0}{p_0} = 1.17 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1} = 0.117 \text{ km}^{-1}.$$

De aquí que

$$p = p_0 e^{-y/a} \tag{13}$$

donde $1/a = g\rho_0/p_0 = 0.117 \text{ km}^{-1}$ o $a = 8.55 \text{ km}$. La constante a da el cambio de altitud para el cual la presión decae por un factor de e . O, lo que es lo mismo, la presión atmosférica decae por un factor de 10 cuando la altitud cambia en $a \ln 10 = 2.30a = 20 \text{ km}$. A una altitud de $h = 20 \text{ km}$ sobre el nivel del mar, la presión atmosférica sería

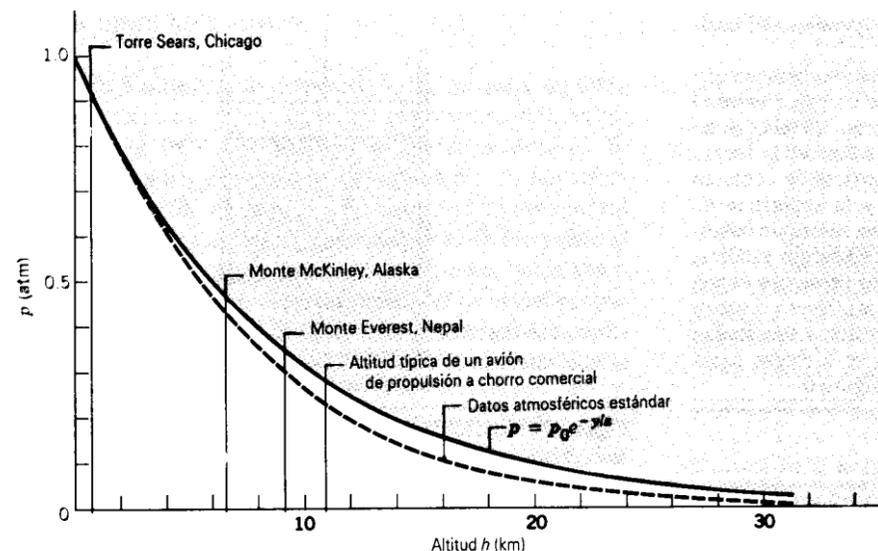


Figura 5 Comparación entre los datos de la presión atmosférica estándar (línea de puntos) con las predicciones de la ecuación 13 (línea continua). Las dos curvas difieren porque nuestro cálculo despreció la variación de la densidad con la temperatura al aumentar la altitud.

entonces 0.1 atm; en $h = 40 \text{ km}$ sobre el nivel del mar, sería 0.01 atm. La figura 5 muestra una comparación entre la variación de la presión con la altitud predicha por la ecuación 13 y la medida para la atmósfera.

Para los gases a una temperatura uniforme la densidad ρ de cualquier capa es proporcional a la presión p en esa capa. Sin embargo, los líquidos son casi incompresibles, de modo que las capas más bajas no resultan notablemente comprimidas por el peso de las capas más altas superpuestas a ellas, y la densidad ρ es prácticamente constante en todos los niveles. La variación de la presión con la distancia sobre el fondo del fluido en un gas es diferente de la de un líquido, como lo indica la ecuación 9 para un líquido y la ecuación 13 para un gas.

Problema muestra 1 Un tubo en U, en el cual ambos extremos están abiertos a la atmósfera, contiene cierta cantidad de agua. En el otro lado se vierte aceite, sustancia que no se mezcla con el agua, hasta que llega a una distancia $d = 12.3 \text{ mm}$ sobre el nivel del agua, del otro lado, nivel que se ha elevado mientras tanto a una distancia $a = 67.5 \text{ mm}$ desde su nivel original (Fig. 6). Halle la densidad del aceite.

Solución En la figura 6 los puntos C están a la misma presión. (Si esto no fuera así, entonces el elemento de fluido en forma de U que está abajo del nivel CC experimentaría una fuerza neta no balanceada y se aceleraría, violando la hipótesis estática que hacemos en este problema.) La caída de presión desde C hasta la superficie del lado del agua es $\rho_w g 2a$, donde $2a$ es la altura de la columna de agua que está sobre C. La caída de presión en el otro lado desde C hasta la superficie es $\rho g(2a + d)$, donde ρ

es la densidad del aceite, desconocida. Igualando las presiones en el punto C de cada lado, obtenemos

$$p_0 + \rho_w g 2a = p_0 + \rho g(2a + d)$$

y así

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_w \frac{2a}{2a + d} \\ &= (1.000 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \frac{2(67.5 \text{ mm})}{2(67.5 \text{ mm}) + 12.3 \text{ mm}} \\ &= 916 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

La razón de la densidad de una sustancia a la densidad del agua se llama *densidad relativa* (o *gravedad específica*)

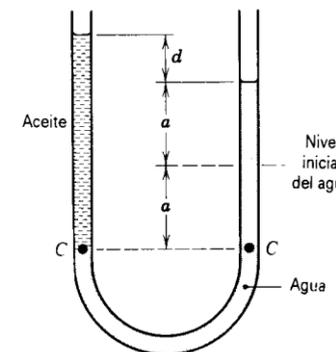


Figura 6 Problema muestra 1. Un tubo en U se llena parcialmente de agua y parcialmente de aceite de densidad desconocida.

de esa sustancia. En este caso la gravedad específica del aceite es 0.916.

Obsérvese que al resolver este problema hemos supuesto que la presión es continua sobre la superficie de contacto entre el aceite y el agua en el punto C del lado izquierdo del tubo. Si no fuera así y las presiones fueran diferentes, entonces la fuerza ejercida por el fluido en un lado de la superficie de contacto diferiría de la del fluido en el otro lado, y la superficie de contacto se aceleraría bajo la influencia de una fuerza no balanceada. Puesto que estamos suponiendo una situación estática, no puede haber movimiento y por lo tanto las presiones deben ser las mismas. Sin embargo, cuando vertemos primero el aceite en el tubo puede haber una diferencia de presión y una fuerza no balanceada que causaría que el sistema se moviese hasta llegar a la situación estática mostrada en la figura 6.

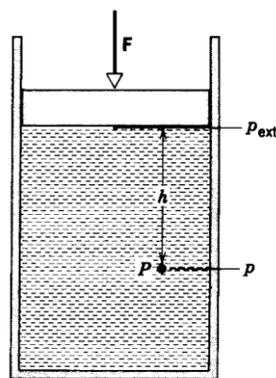


Figura 7 Un fluido dentro de un cilindro equipado con un émbolo móvil. La presión en cualquier punto P se debe no solamente al peso del fluido sobre el nivel de P sino también a la fuerza ejercida por el émbolo.

$$p = p_{ext} + \rho gh. \quad (14)$$

Supongamos ahora que la presión externa aumenta en una cantidad Δp_{ext} , quizá por haber añadido algo de más peso sobre el émbolo. ¿Cómo cambia la presión p en el fluido como resultado de este cambio en la presión externa? Suponemos que el líquido es incompresible, de modo que la densidad ρ permanece constante. El cambio en la presión externa da por resultado un cambio en la presión del fluido que se deduce de la ecuación 14:

$$\Delta p = \Delta p_{ext} + \Delta(\rho gh). \quad (15)$$

Puesto que el líquido es incompresible, la densidad es constante, y el segundo término a la derecha en la ecuación 15 es igual a cero. En este caso, obtenemos

$$\Delta p = \Delta p_{ext}. \quad (16)$$

El cambio de presión en cualquier punto del fluido es sencillamente igual al cambio de la presión externa aplicada. Este resultado confirma el principio de Pascal y demuestra que se deduce directamente de nuestra consideración previa de la presión estática en un fluido. Por lo tanto, no es un principio independiente sino una consecuencia directa de nuestra formulación de la estática de los fluidos.

Si bien hemos derivado el resultado anterior para los líquidos incompresibles, el principio de Pascal se cumple en todos los casos de fluidos reales (compresibles), ya sean gases o líquidos. El cambio en la presión externa causa un cambio en la densidad que se propaga en el fluido como una onda a la velocidad del sonido, pero una vez que la perturbación termina y se establece el equilibrio, se encuentra que el principio de Pascal permanece válido.

La palanca hidráulica

La figura 8 muestra un dispositivo que se usa a menudo para levantar un objeto pesado, como un automóvil. Sobre un pistón de área A_i se ejerce una fuerza externa F_i . El objeto que va a ser levantado ejerce una fuerza Mg sobre el émbolo grande de área A_o . En equilibrio, la magnitud de la fuerza hacia arriba F_o ejercida por el fluido sobre el émbolo grande debe ser igual a la de la fuerza hacia abajo Mg del peso del objeto (despreciando el peso del propio émbolo). Deseamos hallar la relación entre la fuerza aplicada F_i y la "fuerza de salida" F_o que el sistema puede ejercer sobre el émbolo grande.

La presión sobre el fluido en el émbolo pequeño, debida a nuestra fuerza externa aplicada, es $p_i = F_i/A_i$. De acuerdo con el principio de Pascal, esta presión de "entrada" debe ser igual a la presión de "salida" $p_o = F_o/A_o$, que el fluido ejerce sobre el émbolo grande. Entonces $p_i = p_o$, y entonces

$$\frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o},$$

o sea

$$F_i = F_o \frac{A_i}{A_o} = Mg \frac{A_i}{A_o}. \quad (17)$$

La razón A_i/A_o es generalmente mucho menor de 1, y entonces la fuerza aplicada puede ser mucho menor que el peso Mg que está siendo levantado.

El movimiento hacia abajo del émbolo pequeño a lo largo de una distancia d_i desplaza un volumen de fluido $V = d_i A_i$. Si el fluido es incompresible, entonces este volumen debe ser igual al volumen desplazado por el movimiento hacia arriba del émbolo grande:

$$V = d_i A_i = d_o A_o,$$

o

$$d_o = d_i \frac{A_i}{A_o}. \quad (18)$$

Si A_i/A_o es un número pequeño, entonces la distancia a la que se desplaza el émbolo grande es mucho más pequeña que la distancia a la que se desplaza el émbolo pequeño

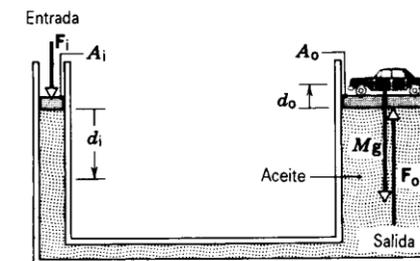


Figura 8 La palanca hidráulica. Una fuerza F_i aplicada al émbolo pequeño puede producir una fuerza F_o mucho mayor sobre el émbolo grande, que pueda levantar un peso Mg .

a causa de la fuerza aplicada. El precio que pagamos por la posibilidad de levantar una carga grande es el de perder la posibilidad de trasladarla muy lejos.

Al combinar las ecuaciones 17 y 18 vemos que $F_i d_i = F_o d_o$, lo cual demuestra que el trabajo efectuado por la fuerza externa sobre el émbolo pequeño es igual al trabajo efectuado por el fluido sobre el émbolo grande. Entonces, (despreciando la fricción y otras fuerzas disipativas) no existe una ganancia (o pérdida) neta de energía al usar este sistema hidráulico.

Problema muestra 2 La figura 9 muestra una vista esquemática de un gato hidráulico empleado para elevar un automóvil. El fluido hidráulico es aceite (densidad = 812 kg/m^3). Se emplea una bomba de mano, con la cual se aplica una fuerza de magnitud F_h al extremo del mango de la bomba. La masa combinada del automóvil que va a ser elevado y la plataforma de elevación es de $M = 1980 \text{ kg}$, y el émbolo grande tiene un diámetro de 16.4 cm . La longitud L del mango de la bomba es de 9.4 cm . (a) ¿Cuál es la fuerza aplicada F_h necesaria para elevar el automóvil? (b) Por cada carrera hacia abajo de la bomba, en la que la mano se mueve una distancia vertical de 28 cm , ¿a qué altura se eleva el automóvil?

Solución (a) Partiendo de la ecuación 17,

$$F_i = Mg \frac{A_i}{A_o} = (1980 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \frac{\pi(1.1 \text{ cm})^2}{\pi(8.2 \text{ cm})^2} = 349 \text{ N}.$$

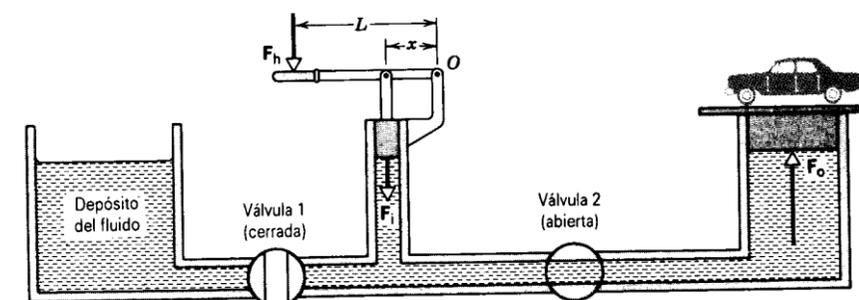


Figura 9 Problema muestra 2. Se emplea una bomba hidráulica para elevar un automóvil. En la carrera hacia abajo, se cierra la válvula 1 y se abre la válvula 2. Durante la carrera hacia arriba, se abre la válvula 1 y se cierra la válvula 2, permitiendo que se transfiera fluido adicional a la cámara hidráulica.

Considerando las torcas sobre el mango de la bomba con respecto al punto de pivoteo O , despreciando las masas del mango de la bomba y del émbolo pequeño, y suponiendo que el mango de la bomba se mueva con una aceleración angular despreciablemente pequeña, obtenemos

$$\sum \tau = F_b L - F_i x = 0,$$

donde hemos empleado la tercera ley de Newton para relacionar a la fuerza F_i ejercida por el mango de la bomba sobre el émbolo con la fuerza $-F_i$ ejercida por el émbolo sobre el mango de la bomba. Resolviendo para F_b , hallamos que

$$F_b = F_i \frac{x}{L} = (349 \text{ N}) \frac{9.4 \text{ cm}}{36 \text{ cm}} = 91 \text{ N}.$$

Tal fuerza, alrededor de 20 lb, puede ser aplicada fácilmente a mano.

(b) Cuando la mano se mueve a lo largo de una distancia vertical h , el émbolo pequeño se moverá a lo largo de la distancia

$$d_i = h \frac{x}{L} = (28 \text{ cm}) \frac{9.4 \text{ cm}}{36 \text{ cm}} = 7.3 \text{ cm}.$$

La ecuación 18 da entonces la distancia recorrida por el émbolo grande:

$$d_o = d_i \frac{A_i}{A_o} = (7.3 \text{ cm}) \frac{\pi(1.1 \text{ cm})^2}{\pi(8.2 \text{ cm})^2} = 0.13 \text{ cm} = 1.3 \text{ mm}.$$

Elevar el automóvil sólo a una distancia tan corta es el precio que pagamos por ejercer una fuerza tan pequeña para elevarlo. Por supuesto, si queremos un aparato que sea útil debemos poder elevar el automóvil a una distancia más grande, lo cual se consigue por medio de muchas carreras de la bomba. Para evitar que el automóvil descienda durante la carrera hacia arriba de la bomba, se emplea el dispositivo de válvulas mostrado en la figura 9. Durante la carrera hacia abajo, las válvulas están en la posición mostrada en la figura 9, y el automóvil se eleva a una distancia d_o . Durante la carrera de retorno se cierra la válvula 2, atrapando al fluido del lado derecho de la cámara y manteniendo el automóvil a una altura fija; luego, se abre la válvula 1, de modo que la carrera de retorno reciba fluido adicional del depósito del lado izquierdo de la cámara. En la siguiente carrera hacia abajo, las válvulas retornan a la posición mostrada en la figura, y el automóvil es elevado en otro incre-

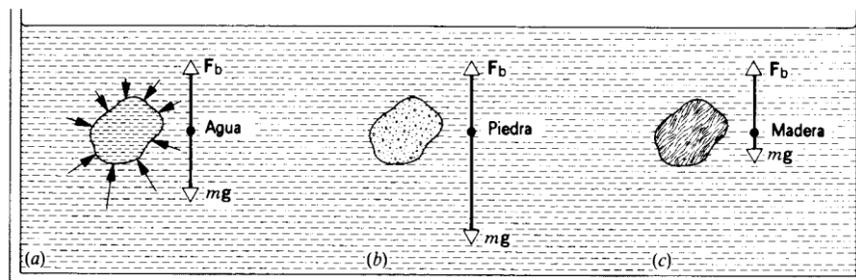


Figura 10 (a) Una bolsa de plástico delgada llena de agua en equilibrio bajo el agua. El agua que rodea a la bolsa ejerce fuerzas de presión sobre su superficie, siendo la resultante una fuerza de rotación o empuje hacia arriba F_b que actúa sobre la bolsa. (b) Para una piedra del mismo volumen, la fuerza de flotación es la misma, pero el peso excede a la fuerza de flotación, y así, la piedra no está en equilibrio. (c) En el caso de una pieza de madera del mismo volumen, el peso es menor que la fuerza de flotación.

mento d_o . En efecto, el volumen de fluido hidráulico recibido del lado izquierdo de la cámara durante la carrera hacia arriba se bombea hacia el lado derecho de la cámara durante la carrera hacia abajo. Cuando se completa el proceso, el automóvil descenderá abriendo ambas válvulas y permitiendo que el fluido se drene directamente al depósito.

¿Cómo cambia la operación del gato hidráulico cuando el automóvil es levantado y la altura del fluido en la columna derecha aumenta? Haga un cálculo numérico.

Principio de Arquímedes

La figura 10a muestra cierto volumen de agua contenida en una bolsa de plástico delgado situada bajo el agua. El agua de la bolsa está en equilibrio estático. Por lo tanto, su peso debe estar equilibrado por una fuerza hacia arriba de igual magnitud. Esta fuerza hacia arriba es la suma vectorial de todas las fuerzas hacia adentro ejercidas por el fluido que rodea a la bolsa. Las flechas de la figura 10a representan a las fuerzas ejercidas sobre el volumen de líquido como resultado de la presión del fluido que lo rodea. Nótese que las fuerzas hacia arriba sobre el fondo de la bolsa son más grandes que las fuerzas hacia abajo sobre la parte superior, debido a que la presión aumenta con la profundidad. La fuerza neta hacia arriba que resulta de esta diferencia de presiones se denomina *fuerza de flotación o empuje*.

La presión ejercida sobre un objeto sumergido por el líquido que lo rodea ciertamente no depende del material del cual está hecho el objeto. Por lo tanto, podríamos sustituir la bolsa de agua por un trozo de madera del mismo tamaño y forma exactas, y la fuerza de flotación no cambiaría. La fuerza hacia arriba sigue siendo igual al peso del volumen original de agua. Esto nos conduce al principio de Arquímedes:

Todo cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido sufre un empuje de abajo arriba por una fuerza de magnitud igual al del peso del fluido que desaloja.

alojada es mayor que el peso del objeto. Por lo tanto, el objeto se eleva hasta subir a la superficie, y continúa elevándose hasta que la parte de él que quede sumergida sea del volumen necesario para desalojar al agua cuyo peso es igual al peso total del objeto. En esa situación el objeto flota en equilibrio.

La fuerza de flotación puede verse como si actuase en el centro de gravedad del fluido desalojado por la parte sumergida de un objeto flotante. Este punto se conoce como *centro de flotación*. El peso actúa en el centro de gravedad de todo el objeto. Estos dos puntos no son en general los mismos (Fig. 11a). Si los dos puntos están situados en la misma línea vertical, entonces el objeto puede flotar en equilibrio: tanto la fuerza neta como la torca neta son nulas. Si el objeto flotante se ladea ligeramente sacándolo de su posición de equilibrio, entonces la forma total del fluido desalojado cambia, y el *centro de flotación* cambia su posición con respecto al centro de gravedad del objeto flotante. Así pues, sobre el objeto flotante actúa una torca que podría inclinar al objeto nuevamente hacia su posición de equilibrio (Fig. 11b), o podría actuar en la otra dirección para volcarlo completamente (Fig. 11c).

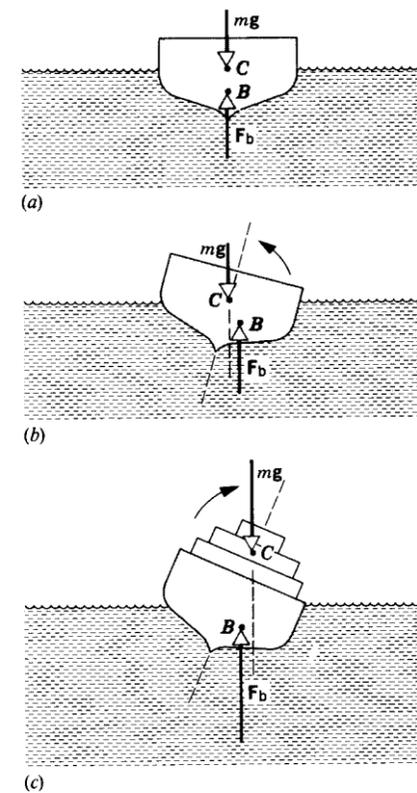


Figura 11 (a) Una sección transversal de un barco que flota en posición normal. La fuerza de flotación F_b actúa en el centro de flotación B , y el peso actúa en el centro de gravedad C . El barco está en equilibrio bajo la acción de estas fuerzas. (b) Cuando el barco se ladea, el centro de flotación puede ya no estar situado en la misma línea vertical que el centro de gravedad, y puede actuar una torca neta sobre el barco. Aquí, la torca con respecto a C actúa para regresar al barco a la posición normal. (c) Aquí, el centro de gravedad está situado más arriba, de modo que la torca respecto a C debido a la fuerza de flotación tiende a ladear al barco aun más.

Un objeto de mayor densidad que el agua (Fig. 10b) desaloja un volumen de agua cuyo peso es menor que el peso del objeto. Por lo tanto, el objeto se hunde en el agua, porque la fuerza del empuje es menor que el peso del objeto. Si tratamos de elevar al objeto mientras está bajo el agua, encontramos que exige menos fuerza que el peso normal del objeto, siendo la diferencia la fuerza del empuje. Los objetos sumergidos parecen pesar menos de lo que pesan normalmente. Los astronautas se preparan para sus viajes practicando tareas en grandes tanques bajo el agua, para simular un tanto la condición ingravidez en el espacio.

Un objeto de densidad menor que el agua (Fig. 10c) experimenta una fuerza neta hacia arriba cuando está completamente sumergido, porque el peso del agua des-

Problema muestra 3 ¿Qué fracción del volumen total de un iceberg queda expuesta?

Solución El peso del iceberg es

$$W_i = \rho_i V_i g,$$

donde V_i es el volumen del iceberg. El peso del volumen V_w del agua de mar desalojada (o, lo que es lo mismo, del volumen de la parte sumergida del iceberg) es la fuerza de flotación

$$F_b = \rho_w V_w g.$$

Pero F_b es igual a W_i , porque el iceberg está en equilibrio, de modo que

$$\rho_w V_w g = \rho_i V_i g,$$

y, usando las densidades de la tabla 2,

$$\frac{V_w}{V_i} = \frac{\rho_i}{\rho_w} = \frac{917 \text{ kg/m}^3}{1024 \text{ kg/m}^3} = 0.896 = 89.6\%.$$

El volumen del agua desalojada V_w es el volumen de la porción sumergida del iceberg, de modo que el 10.4% del iceberg se halla expuesto sobre la superficie.

17-5 MEDICIÓN DE LA PRESIÓN

La presión ejercida por un fluido puede medirse usando técnicas ya sea estáticas o dinámicas. Los métodos dinámicos se basan en la velocidad del flujo de un fluido en movimiento y se estudian en el capítulo 18. En esta

sección trataremos los métodos estáticos para medir la presión.

La mayoría de los aparatos de medición de la presión usan la presión atmosférica como nivel de referencia y miden la diferencia entre la presión real y la presión atmosférica, llamada *presión manométrica*. La presión real en un punto de un fluido se llama *presión absoluta*, que es entonces la presión atmosférica más la presión manométrica. La presión manométrica se da ya sea arriba o abajo de la presión atmosférica y puede entonces ser positiva o negativa; la presión absoluta, por su parte, siempre es positiva.

El barómetro de mercurio es un tubo largo de vidrio, lleno con mercurio y luego invertido dentro de una cubeta que contiene el mismo metal, como se muestra en la figura 12. El espacio sobre la columna de mercurio es, en efecto, un vacío que contiene únicamente vapor de mercurio, cuya presión p_2 es tan pequeña a las temperaturas ordinarias que puede ser despreciada. La presión p_1 sobre la superficie de la cubeta de mercurio es la presión desconocida p que deseamos medir. Partiendo de la ecuación 8, obtenemos

$$p_2 - p_1 = 0 - p = -\rho g(y_2 - y_1) = -\rho gh,$$

o

$$p = \rho gh.$$

Midiendo la altura de la columna sobre la superficie de la cubeta nos da entonces la presión.

El barómetro de mercurio se utiliza para medir la presión de la atmósfera, p_0 . La columna de mercurio del barómetro tiene una altura de unos 760 mm al nivel

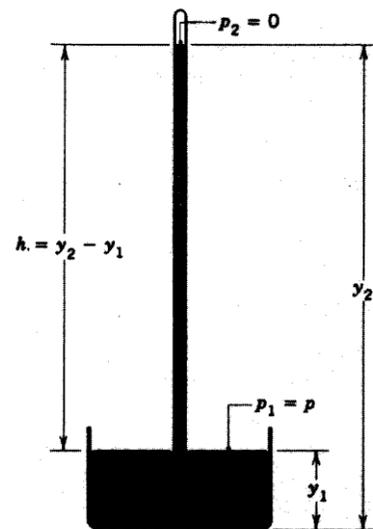


Figura 12 Barómetro de mercurio. El mercurio que está en la cubeta se halla en equilibrio bajo la influencia de la presión atmosférica y del peso del mercurio contenido en la columna vertical.

del mar, variando de acuerdo con la presión atmosférica. La presión de 1 atmósfera (1 atm) es equivalente a la ejercida por una columna de mercurio de 760 mm de altura a 0° C sometida a la gravedad normal ($g = 9.80665 \text{ m/s}^2$). La densidad del mercurio a esta temperatura es de $1.35955 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$. De aquí que 1 atmósfera sea equivalente a

$$1 \text{ atm} = (1.35955 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.80665 \text{ m/s}^2)(0.76 \text{ m}) \\ = 1.013 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \quad (\equiv 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}).$$

La presión de la atmósfera en cualquier punto es numéricamente igual al peso de una columna de aire de área unitaria en su sección transversal que se extiende desde ese punto hasta la parte más alta de la atmósfera. Puesto que la presión atmosférica normal puede expresarse como 14.7 lb/in^2 , sabemos que la columna vertical de aire que se extiende desde cada pulgada cuadrada de la superficie de la Tierra hasta la parte más alta de la atmósfera tiene un peso de 14.7 libras. Como ya vimos en la sección 17-3, la presión atmosférica disminuye con la altitud. Existen también variaciones de la presión atmosférica en una localidad determinada de un día a otro a causa de que la atmósfera no es estática.

Las lecturas del barómetro se expresan a veces en torr, donde 1 torr es la presión ejercida por una columna de mercurio de 1 mm de altura en un lugar donde $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ y a una temperatura (0° C) a la cual el mercurio tiene una densidad de $1.35955 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$. Entonces,

$$1 \text{ torr} = (1.35955 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.80665 \text{ m/s}^2)(0.001 \text{ m}) \\ = 133.326 \text{ Pa}.$$

El manómetro de tubo abierto (Fig. 13) mide la presión manométrica. Consta de un tubo en forma de U lleno de líquido, el tubo está abierto por un extremo a la atmósfera y conectado en el otro extremo al sistema (tanque) cuya presión p deseamos medir. Partiendo de la ecuación 9 obtenemos

$$p - p_0 = \rho gh.$$

Entonces, la presión manométrica, $p - p_0$, es proporcional a la diferencia de altura en las columnas de líquido del tubo en U. Si el recipiente contiene gas a una presión elevada, se emplea en el tubo un líquido más denso como el mercurio; cuando se manejan presiones bajas, puede utilizarse agua.

Problema muestra 4 La columna de mercurio de un barómetro tiene una altura h de 740.35 mm. La temperatura es de -5.0° C, a cuya temperatura la densidad del mercurio es de $1.3608 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$. La aceleración en caída libre g en el sitio del barómetro es de 9.7835 m/s^2 . ¿Cuál es la presión atmosférica?

Solución Partiendo de la ecuación 8 tenemos

$$p_0 = \rho gh \\ = (1.3608 \times 10^4 \text{ kg/m}^3)(9.7835 \text{ m/s}^2)(0.74035 \text{ m}) \\ = 9.8566 \times 10^4 \text{ Pa} = 739.29 \text{ torr}.$$

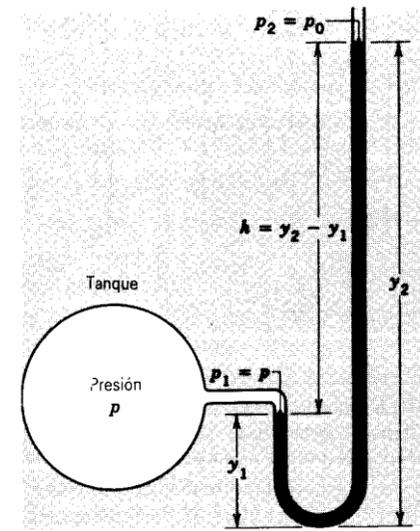


Figura 13 Un manómetro de tubo abierto, que puede utilizarse para medir la presión de un fluido en un tanque.

Nótese que el valor de la presión en torr (739.29 torr) es numéricamente cercano al valor de la altura h de la columna de mercurio expresada en mm (740.35 mm). Estas dos cantidades serán numéricamente iguales sólo si el barómetro está localizado en un sitio donde g tenga su valor normal y cuando la temperatura del mercurio sea 0° C.

Otra manera de expresar el resultado de este problema muestra sería como 0.98566 bar o 985.66 milibar, donde 1 bar = 10^5 Pa .

Notas históricas (Opcional)

El barómetro de mercurio fue inventado por el italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), en memoria de quien ha sido nombrada la unidad torr. Torricelli describió en 1644 sus experimentos con el barómetro de mercurio en cartas a su amigo Michelangelo Ricci, de Roma. Le explicaba a Ricci que el propósito de su investigación era “no simplemente producir un vacío, sino fabricar un instrumento que mostrase las mutaciones del aire, ora más pesado y denso, ora más ligero y tenue”. Al oír de los experimentos del italiano, Blas Pascal, en Francia, dedujo que si la columna de mercurio se mantenía simplemente por la acción de la presión del aire, la columna debería ser más corta si se encontraba a una altitud elevada. Realizó la prueba en el campanario de una iglesia de París, pero, como deseara resultados más contundentes, le escribió a su cuñado para que ensayase el experimento en la Puy de Dôme, una alta montaña de Auvernia. La diferencia medida en la altura del mercurio fue de 8 cm, resultado “que nos llenó de admiración y asombro”. El propio Pascal construyó un barómetro usando vino tinto y un tubo de vidrio de 14 m de longitud.

El principal significado de estos experimentos en aquel tiempo consiste en que ofrecieron una prueba fehaciente de que podía crearse un espacio evacuado. Aristóteles creía que no podía existir un vacío y, muchos años después, el propio filósofo Descartes mantenía el mismo punto de vista. Durante 2000 años los filósofos hablaron del “horror” que la naturaleza sentía por un espacio vacío: el *horror vacui*. Se decía que la naturaleza impedía la formación de un vacío abrazándose a todo lo cercano

y con ello llenando cualquier espacio evacuado. De aquí que el mercurio o el vino deberían llenar el tubo invertido a causa de que “la naturaleza aborrecía al vacío”. Los experimentos de Torricelli y de Pascal demostraron que existían limitaciones a la habilidad de la naturaleza para impedir el vacío. Causaron una conmoción en aquellos tiempos. La meta de producir un vacío se convirtió en una realidad práctica gracias a la invención de las bombas por Otto von Guericke en Alemania alrededor de 1650 y por Robert Boyle en Inglaterra alrededor de 1660. Aun cuando estas bombas fueron relativamente primitivas, proporcionaron una herramienta para la experimentación. Con una bomba y un cántaro de agua, pudo habilitarse un espacio experimental en el cual estudiar cómo resultan afectadas las propiedades del calor, la luz, el sonido, y más tarde la electricidad y el magnetismo por una atmósfera cada vez progresivamente enrarecida. Si bien incluso hoy día no puede hacerse desaparecer completamente todo rastro de gas de un recipiente cerrado, estos sabios del siglo XVII liberaron a la ciencia del falso principio del *horror vacui* y estimularon los esfuerzos para crear sistemas de alto vacío.

En el curso de varias décadas del siglo XVII se desarrollaron no menos de seis instrumentos importantes. Éstos son el barómetro, la bomba de aire, el reloj de péndulo, el telescopio, el microscopio, y el termómetro. Todos ellos suscitaron gran asombro y curiosidad. ■

17-6 TENSIÓN SUPERFICIAL (Opcional)

Con frecuencia podemos observar a las hojas y a los insectos flotar sobre la *superficie* de un cuerpo de agua (Fig. 14a). No se hallan parcialmente sumergidos y por lo tanto *no* reciben el empuje según enuncia el principio de Arquímedes. En este caso el objeto está en la superficie por completo y nada de él se halla sumergido.

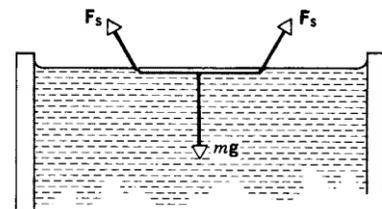
El objeto se mantiene a flote a causa de la *tensión superficial* del líquido. Podemos demostrar la tensión superficial del agua haciendo flotar con cuidado una aguja de acero o una hoja de afeitar. Por supuesto, no existe manera de que el acero flote según el principio de Arquímedes, puesto que su densidad es mayor que la del agua. Si sumergimos a la aguja o a la hoja de afeitar, éstas quedarán hundidas tal como lo enuncia el principio de Arquímedes. Solamente podrán flotar cuando estén enteramente en la superficie. Si añadimos al agua un producto químico, llamado agente tensioactivo o surfactante, éste reduce la tensión superficial (al reducir la fuerza de cohesión entre las moléculas), impidiendo así que el objeto flote. Los detergentes son surfactantes comunes. Si introducimos cuidadosamente detergente en el agua sobre la que esté flotando una hoja de afeitar, la tensión superficial disminuye súbitamente y la hoja de afeitar se hunde hasta el fondo.

Un objeto flotante, como el que se muestra en la figura 14a, causa una ligera depresión en la capa superficial del líquido (Fig. 14b), estirándola, y por lo tanto tiende a aumentar su energía potencial. Como la red de acrobacia en un circo, la superficie estirada ejerce una fuerza de restitución, cuya componente vertical puede mantener el equilibrio con el peso del objeto. Sin embargo, pronto veremos que esta analogía del comportamiento de la capa superficial no es del todo correcta.

La figura 15 muestra una manera de medir la tensión superficial de un líquido. Se dobla un alambre delgado para formar tres de los cuatro lados de un rectángulo y como cuarto lado se coloca un alambre deslizante. Si una película del líquido cubre las dos esquinas de la parte inferior (introduciendo esta parte en



(a)



(b)

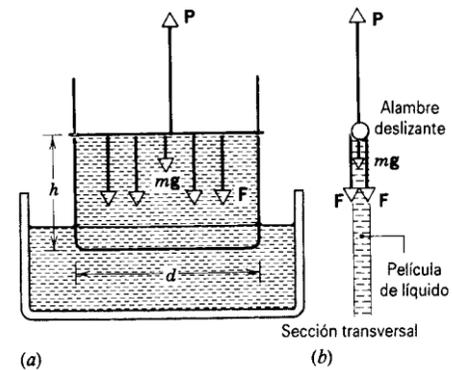
Figura 14 (a) Una hoja de afeitadora flota sobre la superficie del agua, soportada únicamente por la tensión superficial. (b) La superficie se halla distorsionada por el objeto flotante, el cual se mantiene a flote a causa de las componentes verticales de la fuerza superficial F_s .

un recipiente con el líquido), la tensión superficial tenderá a jalar hacia abajo al alambre deslizante que queda arriba. Aplicamos una fuerza externa hacia arriba P necesaria para mantener al alambre deslizante en equilibrio. Esta fuerza hacia arriba debe equilibrar a la fuerza total hacia abajo que actúa sobre el alambre deslizante, y que es igual a su peso más la fuerza F debida a la tensión superficial.

Por experimentación hallamos que la fuerza F depende de la longitud d del alambre deslizante y que no depende en absoluto de la altura h del rectángulo. Si bien podríamos pensar que la capa superficial es como una especie de tela elástica estirada sobre el líquido, esta observación nos demuestra que tal imagen es incorrecta. Imaginemos a la película de la figura 15 cortada en un número grande N de franjas verticales angostas de longitud h y anchura $\Delta d = d/N$. Si la película se comportase como una tela elástica, cada franja se comportaría como un resorte, y así la fuerza total dependería tanto del número de franjas a modo de resorte (y por tanto de d) como de la longitud h de cada franja. Puesto que la tensión superficial depende únicamente de d y no de h , la analogía de la tela elástica no es correcta.

La tensión superficial γ se define como la fuerza superficial F por unidad de longitud L sobre la cual actúa, es decir,

$$\gamma = \frac{F}{L} \quad (19)$$



(a)

(b)

Figura 15 (a) Diagrama esquemático de un experimento para medir la tensión superficial de un líquido. Una película de líquido se halla sostenida en la parte rectangular vertical, cuyo borde superior es un alambre deslizante. Una fuerza externa equilibra al peso del alambre deslizante más la fuerza total hacia abajo F de la tensión superficial. (b) Diagrama de la sección transversal de la película, donde se muestra que la tensión superficial actúa sobre dos superficies.

Nótese que la tensión superficial no es una fuerza sino una fuerza por unidad de longitud. Nuestro uso previo del término *tensión* siempre ha servido para indicar la presencia de una fuerza, pero aquí el uso es un poco diferente.

En la película de la figura 15, la fuerza actúa a lo largo de una longitud L de $2d$, a causa de que existen *dos* capas superficiales de longitud d cada una. Por lo tanto, la tensión superficial en el arreglo experimental mostrado en la figura 15 sería

$$\gamma = \frac{F}{2d}$$

Para el agua a la temperatura ambiente, el valor de la tensión superficial es de $\gamma = 0.073$ N/m. La adición de jabón reduce la tensión superficial a 0.025 N/m. Los líquidos orgánicos y las soluciones acuosas tienen típicamente tensiones superficiales dentro de este intervalo. La tensión superficial de los metales líquidos es típicamente de un orden de magnitud mayor que la del agua. Por ejemplo, el mercurio líquido a la temperatura ambiente tiene una tensión superficial de 0.487 N/m. (Esta tensión superficial más elevada de los metales se debe a que las fuerzas entre las moléculas están típicamente dentro de un orden de magnitud mayor en los metales que en el agua. Por esta misma razón, los puntos de ebullición de los metales son mucho más elevados que los del agua.)

Podemos también analizar a la tensión superficial desde el punto de vista de la energía. Si movemos al alambre deslizante de la figura 15 a lo largo de un desplazamiento Δx , el trabajo efectuado por la fuerza de la tensión superficial es igual a $F \Delta x$ y es positivo o negativo según Δx tenga el sentido de la fuerza superficial o el sentido opuesto. La fuerza superficial satisface nuestra definición de fuerza conservativa, de la que hablamos en el capítulo 8, y por tanto podemos asociar un cambio en la energía potencial ΔU con la acción de la fuerza superficial, de modo que

$$\Delta U = F \Delta x = \gamma L \Delta x, \quad (20)$$

donde L es la longitud de la capa superficial. El producto $L \Delta x$ es justamente el cambio en el área ΔA de la superficie que tiene



Figura 16 Las gotas que flotan libremente adquieren de manera natural una forma esférica. Aquí el astronauta Dr. Joseph P. Allen, en órbita alrededor de la Tierra a bordo del transbordador *Columbia*, observa una bola de jugo de naranja que él formó usando su distribuidor especial de bebida.

lugar cuando la estiramos. Por lo tanto, podemos expresar a la tensión superficial como:

$$\gamma = \frac{\Delta U}{\Delta A} \quad (21)$$

Esto nos proporciona otra interpretación de la tensión superficial en términos de la *energía potencial superficial por unidad de área de la superficie*.

La tensión superficial causa que gotas suspendidas de un líquido adquieran forma esférica (Fig. 16). Para una gota de una masa o volumen dados, la energía superficial (igual a γ veces el área superficial) es menor cuando el área es más pequeña, y una esfera tiene la razón de superficie/volumen más pequeña de todas las formas geométricas. Si no actúa ninguna otra fuerza sobre la gota, ésta adoptará naturalmente una superficie esférica. En el equilibrio, la tensión superficial produce una fuerza neta hacia adentro sobre un elemento de superficie, la cual es equilibrada por una fuerza igual hacia afuera debida a la presión del líquido contenido en la gota. En una burbuja de jabón (la cual tiene dos superficies y por lo tanto el doble de la tensión superficial de una gota de líquido de igual tamaño), la pre-

sión manométrica del gas confinado dentro de la burbuja proporciona la fuerza hacia afuera necesaria para el equilibrio.

Al igual que las moléculas de una gota de líquido, los protones y los neutrones de un núcleo experimentan fuerzas de corto alcance ejercidas por sus vecinos. El núcleo experimenta una tensión superficial similar a la de una gota de líquido. En el caso del núcleo, la fuerza hacia afuera tiene su origen en la repulsión electrostática de los protones cargados. En muchos núcleos, la forma de equilibrio se determina por el balance entre las fuerzas superficiales y electrostáticas, y por lo tanto no debería sorprendernos que la forma preferida de los núcleos sea la esférica. El cálculo de la energía de amarre, también llamada de descarga, de los núcleos debe incluir un término que corresponda a la energía superficial, la cual típicamente es responsable del 30% de la energía total de amarre.

El hecho de considerar que el núcleo se comporta como una gota de líquido cargada nos proporciona una visión muy clara para entender muchas de las propiedades del núcleo, especialmente de la fisión nuclear, donde el núcleo se divide en dos partes de tamaño comparable. Tal procedimiento se denomina *modelaje*, mediante el cual tratamos de entender a un sistema complejo, cuyas propiedades no pueden a menudo ser calculadas o entendidas directamente, sobre la base de un sistema físico más sencillo de un comportamiento relativamente similar y cuyas propiedades puedan ser calculadas y luego probadas por medio de la experimentación. El *modelo de la gota de agua del núcleo* ha jugado un papel importante en nuestro entendimiento de los núcleos atómicos, como lo estudiaremos en los capítulos 54 y 55 del texto ampliado.

Problema muestra 5 En el experimento que se muestra en la figura 15a, se encuentra que el alambre móvil está en equilibrio cuando la fuerza hacia arriba P es de 3.45×10^{-3} N. El alambre tiene una longitud d de 4.85 cm y una densidad de masa lineal μ de 1.75×10^{-3} kg/m. Halle la tensión superficial del líquido.

Solución A partir de la condición de equilibrio de la figura 15b, tenemos

$$\sum F_y = P - F - mg = 0,$$

o

$$F = P - mg.$$

Siendo $F = 2d\gamma$ y $m = \mu d$, obtenemos

$$2d\gamma = P - \mu d g$$

o sea que

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{P - \mu d g}{2d} \\ &= \frac{3.45 \times 10^{-3} \text{ N} - (1.75 \times 10^{-3} \text{ kg/m})(0.0485 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)}{2(0.0485 \text{ m})} \\ &= 0.027 \text{ N/m. } \blacksquare \end{aligned}$$

PREGUNTAS

1. Explique cómo es posible que la presión sea una cantidad escalar cuando las fuerzas, que son vectores, pueden producirse por la acción de las presiones.
2. Haga una estimación de la densidad promedio de nuestro cuerpo. Explique un modo por el cual podríamos obtener un valor preciso usando las ideas de este capítulo.

- En el capítulo 20 aprenderemos que una sobrepresión de sólo 20 PA corresponde al umbral de la sensación de dolor debida a un sonido intenso. Sin embargo, un buceador a 2 m bajo la superficie del agua experimenta una presión mucho mayor que ésta (¿de cuánto?) y no siente dolor. ¿Por qué esta diferencia?
- Las personas confinadas a una cama tienen menos probabilidades de desarrollar llagas en su cuerpo si usan una cama de agua en lugar de un colchón ordinario. Explique.
- Explique por qué una persona podría estar sobre una cama de clavos sin sentir dolor.
- Explique la aseveración "el agua busca su propio nivel".
- Se vierte agua hasta el mismo nivel en cada uno de los recipientes mostrados en la figura, todos los cuales tienen la misma área en su base (Fig. 17). Si la presión es la misma en el fondo de cada recipiente, la fuerza experimentada por la base de cada recipiente es la misma. ¿Entonces por qué dan los tres recipientes pesos diferentes cuando se les pone en una báscula? Este resultado aparentemente contradictorio es conocido comúnmente como *paradoja hidrostática*.



Figura 17 Pregunta 7.

- ¿Se cumple el principio de Arquímedes en una vasija en caída libre o en un satélite que se mueva en órbita circular?
- Una bola esférica hecha de corcho flota medio sumergida en una marmita de té en reposo sobre la Tierra. ¿Flotará, o se hundirá el corcho, a bordo de un navío espacial que (a) se desplace libremente en el espacio y (b) que se encuentre sobre la superficie de Marte?
- ¿Cómo trabaja una ventosa (copa de succión)?
- ¿Tiene la fuerza de flotación sobre un submarino sumergido la misma intensidad a cualquier profundidad?
- Explique cómo asciende un submarino, cómo se sumerge, y cómo se mantiene a una profundidad fija. ¿Emplean los peces los mismos principios? (Véase "The Buoyancy of Marine Animals", por Eric Denton, *Scientific American*, julio de 1960, pág. 118, y "Submarine Physics", por G. P. Harnwell, *American Journal of Physics*, marzo de 1948, pág. 127).
- Un trozo de madera flota en una palangana de agua dentro de un elevador. Cuando el elevador parte del reposo y acelera hacia abajo, ¿flotará el trozo de madera más arriba sobre la superficie del agua?
- Dos cubetas iguales se llenan hasta el borde con agua, pero una tiene un trozo de madera que flota. ¿Cuál de las dos cubetas (acaso) pesa más?
- Calcule con cierto cuidado la fuerza de flotación que ejerce la atmósfera sobre usted.
- De acuerdo con el problema muestra 3, el 89.6% de un iceberg se halla sumergido. Sin embargo, ocasionalmente

los icebergs se vuelcan, con resultados posiblemente desastrosos sobre un navío cercano. ¿Cómo puede esto suceder considerando que la mayor parte de su masa está bajo el nivel del mar?

- ¿Podemos hundir a un barco de hierro sifoneando agua de mar hacia dentro de él?
- Se les advierte a los buceadores con tanques de aire que no contengan la respiración al nadar hacia arriba. ¿Por qué?
- Una vasija está completamente llena de agua líquida en el punto de congelación y tiene un cubo de hielo que flota, también en el punto de congelación. Al fundirse el cubo, ¿qué le sucede al nivel de agua en estos tres casos: (a) el cubo es hielo sólido; (b) el cubo contiene algunos granos de arena; y (c) el cubo contiene algunas burbujas?
- Aunque se supone que los paracaídas frenan la caída, suelen diseñarse con un agujero en la parte superior. Explique por qué.
- Una pelota flota sobre la superficie del agua en un recipiente expuesto a la atmósfera. ¿Permanecerá sumergida la pelota a su profundidad anterior o se hundirá o elevará un poco si (a) se tapa el recipiente y se le retira el aire o (b) si se tapa el recipiente y se comprime el aire?
- Explique por qué un globo inflado sólo se elevará hasta una altura limitada una vez que comienza a elevarse, mientras que un submarino se hundirá hasta el lecho mismo del océano una vez que haya comenzado a hundirse, a no ser que se lleve a cabo algún cambio.
- ¿Por qué un globo pesa lo mismo cuando está vacío que cuando está lleno de aire a la presión atmosférica? ¿Serían los pesos iguales si se pesaran en un vacío?
- Los recipientes de líquidos tienden a gotear cuando se les eleva en un aeroplano. ¿Por qué? ¿Importa que estén con el lado correcto hacia arriba o no? ¿Importa que estén inicialmente llenos o no?
- Durante la Segunda Guerra Mundial un carguero dañado que apenas era capaz de flotar en el Mar del Norte se dirigió por el estuario del Támesis hacia los muelles de Londres. Se hundió antes de que pudiera llegar. ¿Por qué?
- ¿Es verdad que un objeto flotante estará en un equilibrio estable únicamente si su centro de flotación está encima de su centro de gravedad? Ilustre con ejemplos.
- Los troncos que se descargan verticalmente en un estanque no permanecen verticales, sino que flotan "planos" sobre el agua. Explique.
- ¿Por qué un barco que se hunde, a menudo se voltea al sumergirse en el agua?
- Una barcaza llena de chatarra de hierro está en la esclusa de un canal. Si se arroja al hierro por la borda, ¿qué le pasa al nivel de agua de la esclusa? ¿Y qué si se le arroja sobre el terreno al lado del canal?
- Una cubeta de agua está suspendida de un dinamómetro. ¿Cambiará la lectura del dinamómetro cuando un trozo de hierro suspendido de un cordón se sumerja en el agua? ¿Y cuando se pone en el agua un trozo de corcho?
- Si se le añade suficiente hierro a un extremo de una viga o de un leño de madera uniforme, ¿flotará verticalmente en lugar de horizontalmente (vea la pregunta 27)? Explique por qué.

- Aunque existen dificultades prácticas, es posible, en principio, hacer flotar a un trasatlántico en unos cuantos barriles de agua. ¿Cómo emprendería usted esta labor?
- Una cubeta de agua destapada está sobre un plano sin fricción inclinado a un ángulo α con respecto a la horizontal. Halle la inclinación de equilibrio con la horizontal de la superficie libre del agua cuando (a) la cubeta se mantenga en reposo; (b) se permita que la cubeta se deslice plano abajo a una velocidad constante ($a = 0$, $v = \text{constante}$); y (c) se deslice la cubeta hacia abajo sin restricción ($a = \text{constante}$). ¿Qué pasará si el plano es curvo de modo que $a \neq \text{constante}$?
- En un barómetro, ¿qué tan importante es que su diámetro interior sea uniforme? ¿Y que el tubo del barómetro esté absolutamente vertical?
- Un manómetro de tubo abierto tiene un tubo de diámetro igual al doble del otro. Explique cómo afecta esto a la operación del manómetro. ¿Importa cuál de los dos extremos esté conectado a la cámara cuya presión se quiere medir?
- Hemos considerado a los líquidos bajo compresión. ¿Pueden ser puestos bajo tensión los líquidos? De ser esto posible, ¿se separarán bajo la tensión suficiente como lo hacen los sólidos? (Véase "The Tensile Strength of Liquids", por Robert E. Apfel, *Scientific American*, diciembre de 1972, pág. 58).

PROBLEMAS

Sección 17-2 Presión y densidad

- Halle el aumento de presión en el fluido de una jeringa cuando una enfermera aplica una fuerza de 42.3 N al émbolo de la jeringa de 1.12 cm de diámetro.
- Tres líquidos que no se mezclan se vierten dentro de un recipiente cilíndrico. Las cantidades y densidades de los líquidos son 0.50 L, 2.6 g/cm³; 0.25 L, 1.0 g/cm³; y 0.40 L, 0.80 g/cm³ (L = litro). Halle la fuerza total sobre el fondo del recipiente. (Despréciase la contribución debida a la atmósfera.) ¿Importa que se mezclen los líquidos?
- La ventana de una oficina tiene 3.43 m por 2.08 m. Como resultado del paso de una tormenta, la presión del aire exterior decae a 0.962 atm, pero en el interior la presión se mantiene en 1.00 atm. ¿Qué fuerza neta empujará a la ventana hacia afuera?
- Un cubo sólido de cobre tiene un borde de 85.5 cm de longitud. ¿Cuánta presión debe ejercerse para reducir a 85.0 cm la longitud del borde del cubo? El módulo volumétrico del cobre es de 140 GPa.
- A una caja herméticamente cerrada con una tapa de 12 in² de área se le practica un vacío parcial. Si se requiere una fuerza de 108 lb para retirar la tapa de la caja, y la presión atmosférica exterior es de 15 lb/in², ¿cuál es la presión dentro de la caja?

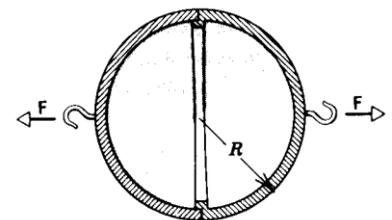


Figura 18 Problema 6.

- Explique por qué dos placas de vidrio que contienen una película delgada de agua entre ellas son difíciles de separar por medio de un jalón directo, pero pueden separarse con facilidad deslizándolas.
- Dé una explicación molecular de por qué la tensión superficial disminuye al aumentar la temperatura.
- Las películas de jabón son mucho más estables que las películas de agua. ¿Por qué? (Considérese cómo reacciona la tensión superficial al estiramiento.)
- Explique por qué una película de jabón se revienta al aparecer un orificio pequeño en ella.
- Explique estas observaciones: (a) el agua forma glóbulos sobre una placa engrasada pero no sobre una limpia; (b) las burbujas pequeñas en la superficie del agua se unen entre sí.
- Si el jabón reduce la tensión superficial del agua, ¿por qué soplamos burbujas de jabón en lugar de burbujas de agua?
- Ciertos insectos pueden caminar sobre el agua. Calcule el peso máximo que puede tener tal insecto y aún sostenerse de este modo.
- ¿Cuál es la fuente de energía que permite que un fluido se eleve en un tubo capilar (es decir, en un tubo de vidrio hueco y fino)?
- ¿Qué significa decir que ciertos líquidos pueden ejercer una pequeña presión negativa?

Sección 17-3 Variación de la presión en un fluido en reposo

- El pulmón humano funciona contra una diferencial de presión de menos de 0.050 atm. ¿A qué profundidad del nivel del agua puede nadar un buceador que respire por medio de un tubo largo (snorkel)?
- Calcule la diferencia hidrostática en la presión de la sangre entre el cerebro y los pies de una persona de 1.83 m de altura.
- Halle la presión total, en pascal, a 118 m bajo la superficie del océano. La densidad del agua de mar es de 1.024 g/cm³ y la presión atmosférica al nivel del mar es de 1.013 × 10⁵ Pa.
- Las descargas del drenaje de una casa construida en una pendiente están a 8.16 m por debajo del nivel de la calle. Si el drenaje está a 2.08 m bajo el nivel de la calle, halle la diferencia de presión mínima que debe crear la bomba de drenaje para transferir los desperdicios cuya densidad media es de 926 kg/m³.
- La figura 19 muestra el diagrama de fase del carbono, indicando los intervalos de temperatura y de presión en que se cristaliza el carbono como diamante o como grafito. ¿Cuál es la profundidad mínima a la que pueden formarse los diamantes si la temperatura local es de 1000° C y las rocas bajo la superficie tienen una densidad de 3.1 g/cm³? Suponga que, como en un fluido, la presión se debe al peso del material que está encima.

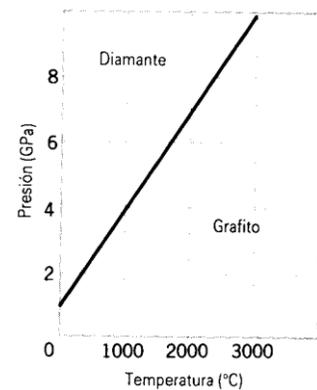


Figura 19 Problema 11.

- De acuerdo con el modelo de temperatura constante de la atmósfera de la Tierra, ¿cuál es la presión (en atm) a una altitud de 5.00 km, y (b) ¿a qué altitud es la presión igual a 0.500 atm? Compare sus respuestas con la figura 5.
- Un tubo en U sencillo contiene mercurio. Cuando se vierten 11.2 cm de agua en la rama derecha, ¿a qué altura se elevará el mercurio en la rama izquierda a partir de su nivel inicial?
- Detrás de la cara vertical aguas arriba de una presa se almacena agua con una profundidad D , como se muestra en la figura 20. Sea W el ancho de la presa. (a) Halle la fuerza horizontal resultante ejercida sobre la presa por la presión manométrica del agua y (b) la torca neta de-

bida a la presión manométrica del agua ejercida respecto a una línea que pase por O paralela al ancho de la presa. (c) ¿Dónde está situada la línea de acción de la fuerza resultante equivalente?

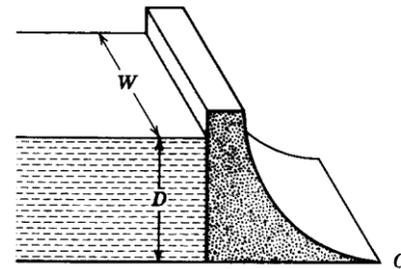


Figura 20 Problema 14.

- Una alberca tiene las dimensiones de 80 ft × 30.0 ft × 8.0 ft. (a) Cuando está llena de agua, ¿cuál es la fuerza (debida al agua únicamente) sobre el fondo? ¿Y sobre los extremos? ¿Y sobre los costados? (b) Si se ha preguntado usted si las paredes de concreto se volcarán o no, ¿es apropiado tomar en cuenta para responder a esto la presión atmosférica?
- ¿Cuál sería la altura de la atmósfera si la densidad del aire (a) fuese constante y si (b) decreciese linealmente hasta cero con la altura? Suponga una densidad al nivel del mar de 1.21 kg/m³.
- Los miembros de una tripulación tratan de escapar de un submarino averiado que está a 112 m bajo la superficie. ¿Cuánta fuerza deberán aplicar contra la escotilla que abre hacia afuera, la cual tiene 1.22 m por 0.590 m, para poder abrirla?
- Un barril cilíndrico tiene un tubo angosto fijo a la tapa, como se muestra junto con sus dimensiones en la figura 21. El recipiente está lleno de agua hasta la parte superior del tubo. Calcule la razón de la fuerza hidrostática ejercida sobre el fondo del barril y el peso del agua contenida en su interior. ¿Por qué no es igual a uno esta razón? (Despréciense la presencia de la atmósfera.)

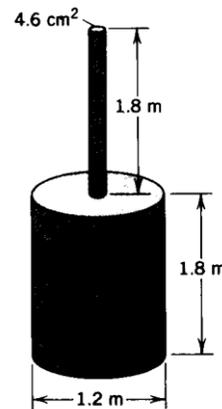


Figura 21 Problema 18.

- Al analizar ciertas características geológicas de la Tierra, suele ser conveniente suponer que la presión a cierto nivel de compensación horizontal, a cierta profundidad en la Tierra, es la misma dentro de una gran región e igual a la ejercida por el peso del material que está encima. Esto es, la presión en el nivel de compensación está dada por la fórmula de la presión hidrostática (fluida). Esto requiere, por ejemplo, que las montañas tengan raíces de baja densidad; véase la figura 22. Considere una montaña de 6.00 km de altura. Las rocas continentales tienen una densidad de 2.90 g/cm³; bajo el continente se encuentra el manto, con una densidad de 3.30 g/cm³. Calcule la profundidad D de la raíz. (Sugerencia: Iguale la presión en los puntos a y b ; la profundidad y del nivel de compensación se cancelará.)

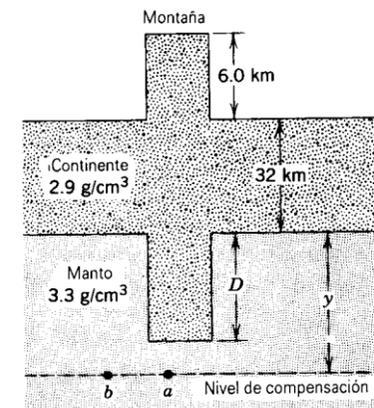


Figura 22 Problema 19.

- (a) Demuestre que la densidad ρ del agua a una profundidad y en el océano se relaciona con la densidad superficial ρ_s según

$$\rho \approx \rho_s [1 + (\rho_s g / B) y],$$
 donde $B = 2.2$ GPa es el módulo volumétrico del agua. Despréciense las variaciones de la temperatura. (b) ¿En qué fracción excederá la densidad a una profundidad de 4200 m a la densidad de la superficie?
- Una probeta de 12.0 cm de longitud llena de agua se hace girar en un plano horizontal en una centrífuga a 655 rev/s. Calcule la presión hidrostática en la base exterior de la probeta. El extremo inferior de la probeta está a 5.30 cm del eje de rotación.
- La superficie de contacto de dos fluidos de densidades diferentes que están en reposo y no se mezclan es horizontal. Demuestre que este resultado general surge (a) del hecho de que la energía potencial de un sistema debe ser mínima en equilibrio estable; (b) del hecho de que en dos puntos cualesquiera en un plano horizontal en cualquiera de los fluidos las presiones son iguales.
- Dos vasijas cilíndricas idénticas con sus bases al mismo nivel contienen cada una un líquido de densidad ρ . El área de cualquiera de las bases es A , pero en una vasija la altura

- del líquido es h_1 y en la otra h_2 . Halle el trabajo efectuado por la gravedad al igualarse los niveles cuando las dos vasijas se conectan entre sí.
- Un tubo en U está lleno con un líquido homogéneo. El líquido se presiona temporalmente en uno de los lados por un émbolo. El émbolo se retira y el nivel del líquido en cada lado oscila. Demuestre que el periodo de oscilación es $\pi\sqrt{2L/g}$, donde L es la longitud total del líquido en el tubo.
- (a) Demuestre que la ecuación 13, la variación de la presión con la altitud en la atmósfera (tomando la temperatura como uniforme), puede escribirse en términos de la densidad ρ como:

$$\rho = \rho_0 e^{-y/a},$$
 donde ρ_0 es la densidad en el suelo ($y = 0$). (b) Suponga que la fuerza de arrastre D debida al aire sobre un objeto que se mueve con una velocidad v está dada por $D = CA\rho v^2$, donde C es una constante, A es el área frontal de la sección transversal del objeto, y ρ es la densidad local del aire. Halle la altitud a la cual la fuerza de arrastre sobre un cohete es máxima si el cohete se lanza verticalmente y se mueve con una aceleración constante hacia arriba a .
- (a) Considere un recipiente de fluido sometido a una aceleración vertical a hacia arriba. Demuestre que la variación de la presión con la profundidad en el fluido está dada por

$$p = \rho h(g + a),$$
 donde h es la profundidad y ρ es la densidad. (b) Demuestre también que si todo el fluido experimenta una aceleración vertical a hacia abajo, la presión a una profundidad h está dada por

$$p = \rho h(g - a).$$

- (c) ¿Qué pasa en caída libre?
- Considere la aceleración horizontal de una masa de líquido en un tanque abierto. Una aceleración de esta clase causa que la superficie del líquido decaiga en el frente del tanque y se eleve en la parte trasera. Demuestre que la superficie del líquido adquiere una pendiente que forma un ángulo θ con la horizontal, donde $\tan \theta = a/g$, siendo a la aceleración horizontal. (b) ¿Cómo varía la presión con h , la profundidad vertical bajo la superficie?
- La tensión en un resorte que mantiene a un bloque sólido bajo la superficie de un líquido (de densidad mayor que el sólido) es T_0 cuando la vasija que lo contiene (Fig. 23) está en reposo. Demuestre que la tensión T , cuando la vasija tenga una aceleración vertical a hacia arriba, está dada por $T_0(1 + a/g)$.
- (a) Un fluido está girando con una velocidad angular constante ω con respecto al eje vertical central de un recipiente cilíndrico. Demuestre que la variación de la presión en la dirección radial está dada por

$$\frac{dp}{dr} = \rho\omega^2 r.$$
 (b) Sea $p = p_c$ en el eje de rotación ($r = 0$) y demuestre entonces que la presión p en cualquier punto r es

$$p = p_c + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2.$$

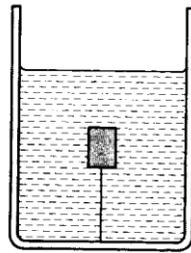


Figura 23 Problema 28.

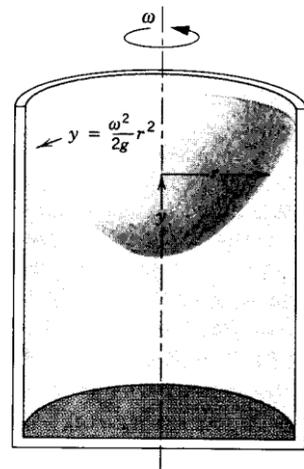


Figura 24 Problema 29.

(c) Demuestre que la superficie del líquido tiene la forma de un paraboloides (Fig. 24); es decir, una sección transversal vertical de la superficie es la curva $y = \omega^2 r^2 / 2g$. (d) Demuestre que la variación de la presión con la profundidad es $p = \rho gh$.

Sección 17-4 Principio de Pascal y principio de Arquímedes

30. (a) Si el pequeño émbolo de una palanca hidráulica tiene un diámetro de 3.72 cm, y el émbolo grande uno de 51.3 cm, ¿qué peso sobre el émbolo pequeño soportará 18.6 kN (p. ej., un automóvil) sobre el émbolo grande? (b) ¿A qué distancia debe moverse el émbolo pequeño para que el automóvil se eleve 1.65 m?
31. Un bote que flota en agua dulce desaloja 35.6 kN de agua. (a) ¿Qué peso de agua desalojaría este bote si estuviese flotando en agua salada de 1024 kg/m^3 de densidad? (b) ¿Cambia el volumen del agua desalojada? Si cambia, ¿en cuánto?
32. Un bloque de madera flota en el agua con 0.646 de su volumen sumergido. En el aceite tiene 0.918 de su volumen sumergido. Halle la densidad (a) de la madera y (b) del aceite.
33. Un bote de hojalata tiene un volumen total de 1200 cm^3 y una masa de 130 g. ¿Cuántos gramos de perdigones de plomo podría contener sin hundirse en el agua? La densidad del plomo es 11.4 g/cm^3 .

34. Alrededor de una tercera parte del cuerpo de un físico que se halla nadando en el Mar Muerto está sobre el nivel del agua. Suponiendo que la densidad del cuerpo humano sea de 0.98 g/cm^3 , halle la densidad del agua en el Mar Muerto. ¿Por qué es mucho más grande que 1.0 g/cm^3 ?
35. Suponga que la densidad de unas pesas de latón sea de 8.0 g/cm^3 y que la del aire sea de 0.0012 g/cm^3 . ¿Qué error fraccionario surge de despreciar la flotabilidad del aire al pesar un objeto de 3.4 g/cm^3 de densidad en una balanza de brazos?
36. Una pieza de hierro fundido que contiene cierto número de porosidades pesa 6130 N en el aire y 3970 N en el agua. ¿Cuál es el volumen de las porosidades de la pieza de fundición? La densidad del hierro es de 7870 kg/m^3 .
37. Un objeto cúbico de dimensión $L = 0.608 \text{ m}$ de lado y de peso $W = 4450 \text{ N}$ determinado en el vacío está suspendido de un alambre en un tanque abierto que contiene un líquido de densidad $\rho = 944 \text{ kg/m}^3$, como en la figura 25. (a) Halle la fuerza total hacia abajo ejercida por el líquido y por la atmósfera sobre la parte superior del objeto. (b) Halle la fuerza total hacia arriba en el fondo del objeto. (c) Halle la tensión en el alambre. (d) Calcule la fuerza de flotación sobre el objeto usando el principio de Arquímedes. ¿Qué razón existe entre todas estas cantidades?

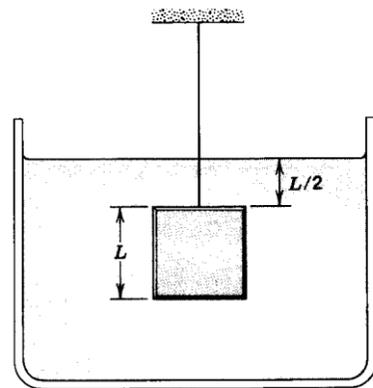


Figura 25 Problema 37.

38. Un pez mantiene su profundidad en el agua salada ajustando el contenido de aire de su hueso poroso o de sus bolsas de aire para hacer que su densidad promedio sea la misma que la del agua. Suponga que el pez tiene una densidad de 1.08 g/cm^3 con sus bolsas de aire aplastadas. ¿A qué fracción del volumen de su cuerpo expandido deberá el pez inflar las bolsas de aire para reducir su densidad promedio a la del agua? Suponga que la densidad del aire es de 0.00121 g/cm^3 .
39. Se ha propuesto un proyecto de traslado de gas natural desde los campos de gas del Mar del Norte en dirigibles enormes, usando el propio gas para proporcionar la fuerza de ascenso. Calcúlese la fuerza necesaria para amarrar al navío aéreo a la tierra para un aterrizaje cuando llegue completamente cargado con $1.17 \times 10^6 \text{ m}^3$ de gas con una densidad de 0.796 kg/m^3 . La densidad del aire es de

1.21 kg/m^3 . (El peso del navío es despreciable en comparación.)

40. El pequeño dirigible *Columbia* de Goodyear (véase la Fig. 26) está navegando lentamente a baja altitud, lleno como es costumbre de gas helio. Su carga útil máxima, incluyendo la tripulación y la carga, es de 1280 kg. ¿Cuánta carga más podría transportar el *Columbia* si sustituimos el helio por hidrógeno? ¿Por qué no se hace? El volumen del espacio interior ocupado por el helio es de 5000 m^3 . La densidad del gas helio es de 0.160 kg/m^3 y la densidad del hidrógeno es de 0.0810 kg/m^3 .



Figura 26 Problema 40.

41. Una esfera hueca de hierro flota casi completamente sumergida en agua; véase la figura 27. El diámetro exterior es de 58.7 cm y la densidad del hierro es de 7.87 g/cm^3 . Halle el diámetro interior de la esfera.

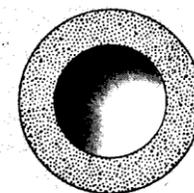


Figura 27 Problema 41.

42. Un bloque de madera tiene una masa de 3.67 kg y una densidad de 594 kg/m^3 . Va a ser cargado con plomo para que flote en el agua con 0.883 de su volumen sumergido. ¿Qué masa de plomo se necesita (a) si el plomo está encima de la madera y (b) si el plomo está amarrado debajo de la madera? La densidad del plomo es de $1.14 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$.
43. Tres niños que pesan 82.4 lb cada uno construyen una balsa enlazando entre sí troncos de 1.05 ft de diámetro y

5.80 ft de longitud. ¿Cuántos troncos se necesitarán para mantenerla a flote? Considere que la densidad de la madera es de 47.3 lb/ft^3 .

44. (a) ¿Cuál es el área mínima de un bloque de hielo de 0.305 m de espesor que flota en el agua para que sostenga encima de sí a un automóvil de 1120 kg de masa? (b) ¿Importa dónde esté colocado el automóvil sobre el bloque de hielo? La densidad del hielo es de 917 kg/m^3 .
45. Un objeto que flota en mercurio tiene una cuarta parte de su volumen sumergida. Si se añade agua suficiente para cubrir al objeto, ¿qué fracción de su volumen permanecerá sumergida en el mercurio?
46. Un leño cilíndrico lleva una carga de plomo en un extremo de modo que flote en posición erecta en el agua, como en la figura 28. La longitud de la parte sumergida es $L = 2.56 \text{ m}$. El leño es puesto a oscilar verticalmente. (a) Demuestre que la oscilación es armónica simple. (b) Halle el periodo de la oscilación. Desprecie el hecho de que el agua tiene un efecto amortiguador sobre el movimiento.

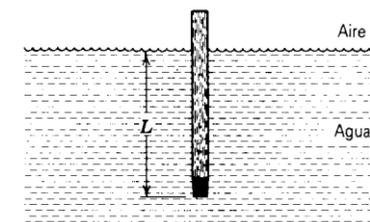


Figura 28 Problema 46.

47. Un automóvil tiene una masa total de 1820 kg. El volumen del espacio de aire del compartimiento de pasajeros es de 4.87 m^3 . El volumen del motor y de las ruedas frontales es de 0.750 m^3 , y el volumen de las ruedas traseras, el tanque de gas y la cajuela es 0.810 m^3 . El agua no puede entrar en estas áreas. El automóvil está estacionado en una colina; el cable del freno de mano se revienta y el automóvil rueda cuesta abajo hasta un lago; véase la figura 29. (a) Al principio no entra nada de agua al compartimiento de pasajeros. ¿Qué volumen del automóvil, en metros cúbicos, está bajo la superficie del agua cuando el automóvil flota como se muestra en la figura? (b) El automóvil se hunde al entrar el agua lentamente. ¿Cuántos metros cúbicos de agua han entrado al automóvil cuando desaparece bajo la superficie del agua? (El automóvil permanece horizontal debido a una carga pesada en la cajuela.)

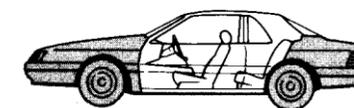


Figura 29 Problema 47.

48. Usted coloca un frasco de vidrio, parcialmente lleno de agua, dentro de una tina (Fig. 30). Tiene una masa de 390 g y un volumen interior de 500 cm³. Ahora comienza usted a llenar la tina de agua y halla, por experimentación, que si el frasco está lleno a menos de la mitad flotará; pero si está lleno a más de la mitad permanece en el fondo de la tina mientras el agua se eleva hasta su borde. ¿Cuál es la densidad del material de que está hecho el frasco?

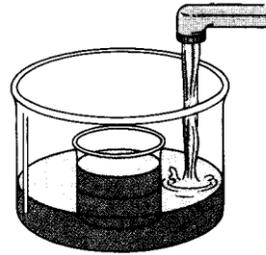


Figura 30 Problema 48.

Sección 17-5 Medición de la presión

49. Calcule la densidad del vino tinto que Pascal usó en su barómetro de 14 m de longitud. Suponga que el vino llenaba el tubo.
50. La presión en la superficie del planeta Venus es de 90 atm (es decir, 90 veces la presión en la superficie de la Tierra). ¿De qué longitud tendría que ser un barómetro de mercurio para medir esta presión? Suponga que el mercurio se mantiene a 0° C.

Sección 17-6 Tensión superficial

51. ¿Cuánta energía está almacenada en la superficie de una burbuja de jabón de 2.1 cm de radio si su tensión superficial es de 4.5×10^{-2} N/m?
52. Una película delgada de agua de 80.0 μ m de espesor está emparedada entre dos placas de vidrio y forma una mancha circular de 12.0 cm de radio. Calcule la fuerza normal necesaria para separar a las placas si la tensión superficial del agua es de 0.072 N/m.
53. Al emplear una solución de jabón en la que la tensión superficial es de 0.025 N/m un niño sopla una burbuja de

jabón de 1.40 cm de radio. ¿Cuánta energía se usa para estirar la superficie del jabón?

54. La tensión superficial del ⁴He líquido es de 0.35 mN/m y la densidad líquida es de 145 kg/m³. Estime (a) el número de átomos/m² de superficie y (b) la energía por enlace, en eV, en el líquido a esta temperatura. La masa de un átomo de helio es de 6.64×10^{-27} kg. Imagine a cada átomo como un cubo y suponga que cada átomo interactúa únicamente con sus cuatro vecinos más cercanos.
55. Demuestre que la diferencia de presión entre el interior y el exterior de una burbuja de radio r es $4\gamma/r$, donde γ es la tensión superficial del líquido con el cual ha sido soplada la burbuja.
56. Una barra sólida de vidrio de radio $r = 1.3$ cm está colocada coaxialmente dentro de un cilindro de vidrio de radio interno $R = 1.7$ cm. Sus extremos del fondo están alineados y situados en contacto con la superficie de un tanque abierto de agua y perpendiculares a ella (véase la Fig. 31). ¿A qué altura se elevará el agua en la región entre la barra y el cilindro? Suponga que el ángulo de contacto sea 0° y use 72.8 mN/m para la tensión superficial del agua.

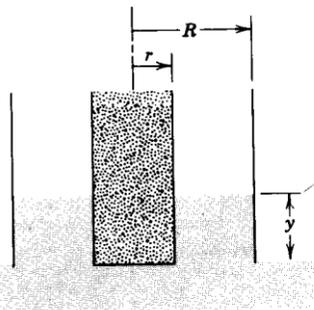


Figura 31 Problema 56.

57. Una burbuja de jabón en el aire tiene un radio de 3.20 cm. Se la sopla luego hasta un radio de 5.80 cm. Use 26.0 mN/m para la tensión superficial (constante) de la burbuja. (a) ¿Cuál es la diferencia de presión inicial en la película de la burbuja? (b) Halle la diferencia de presión en la película para el tamaño más grande. (c) ¿Cuánto trabajo se efectuó contra la atmósfera para hacer más grande a la burbuja? (d) ¿Cuánto trabajo se efectuó para estirar la superficie de la burbuja?

CAPÍTULO 18

DINÁMICA DE LOS FLUIDOS

Pasamos ahora de la estática de los fluidos a la dinámica de los fluidos en movimiento. En esencia, existe poca diferencia entre la dinámica del movimiento de los fluidos y la dinámica de los movimientos de la partícula y del cuerpo rígido, que ya hemos estudiado en capítulos anteriores. Empleamos aquí conceptos ya conocidos para analizar la dinámica de los fluidos, incluyendo las leyes de Newton del movimiento y la conservación de la masa y de la energía. Así pues, en este capítulo aplicaremos estos principios a los fluidos, los que describimos empleando variables tales como la presión y la densidad que hemos presentado en el capítulo 17.

Comenzaremos con un modelo simplificado del flujo fluido, del cual no tendremos en cuenta las fuerzas de disipación. Este enfoque es similar a nuestro estudio previo de la dinámica de la partícula, donde en un principio no tomábamos en cuenta a las fuerzas de disipación (de fricción). Una ventaja de este acceso es que permite un análisis en términos de la conservación de la energía mecánica, como lo hicimos en el capítulo 8 en el caso de las partículas. Más adelante en el presente capítulo ofreceremos una descripción breve de los resultados interesantes y poco usuales que suceden en los fluidos reales cuando se toman en cuenta las fuerzas de disipación, llamadas fuerzas viscosas.

18-1 CONCEPTOS GENERALES DEL FLUJO DE LOS FLUIDOS

Una manera de describir el movimiento de un fluido consiste en dividirlo en elementos de volumen infinitesimal, a los cuales podemos llamar *partículas fluidas*, y seguir el movimiento de cada partícula. Si conocemos a las fuerzas que actúan sobre cada partícula del fluido, podemos entonces resolver para las coordenadas y velocidades de cada partícula en función del tiempo. Este procedimiento, que es una generalización directa de la mecánica de la partícula, fue desarrollado por primera vez por Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Puesto que el número de partículas de fluido es generalmente muy grande, el uso de este método es una tarea formidable.

Existe otro tratamiento distinto, desarrollado por Leonhard Euler (1707-1783), que es más conveniente en la mayoría de los casos. En él abandonamos el intento de especificar la historia de cada partícula del fluido y, en cambio, especificamos la densidad y la velocidad del fluido en cada punto en el espacio y en cada instante de tiempo. Éste es el método que usaremos. Describiremos al movimiento del fluido especificando la densidad

$\rho(x, y, z, t)$ y la velocidad $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ en el punto x, y, z en el tiempo t . Centraremos entonces nuestra atención en qué está sucediendo en un punto particular del espacio en ese tiempo determinado, en lugar de ocuparnos de qué le sucede a una partícula dada de fluido. Cualquier cantidad empleada para describir el estado del fluido, por ejemplo, la presión p , tendrá un valor definido en cada punto en el espacio y en cada instante de tiempo. Si bien, esta descripción del movimiento del fluido centra la atención sobre un punto en el espacio en lugar de sobre una partícula del fluido, no podemos evitar seguir a las partículas del fluido en sí mismas, cuando menos durante intervalos de tiempo cortos dt . Después de todo, las leyes de la mecánica se aplican a partículas y no a puntos en el espacio.

Consideraremos en primer lugar algunas características generales del flujo de los fluidos.

1. *El flujo de los fluidos puede ser estacionario o no estacionario.* Describamos al flujo en términos de los valores de variables tales como la presión, la densidad, y la velocidad de flujo en cada punto del fluido. Si estas variables son constantes en el tiempo, se dice que el flujo es *estacionario*. Los valores de estas variables cambian por lo general de un punto a otro, pero no cambian con el

tiempo en cualquier punto en particular. A menudo puede conseguirse esta condición a velocidades de flujo bajas; una corriente que fluya continuamente es un ejemplo. En el flujo no es estacionario, como en una ola grande provocada por la marea, las velocidades v son funciones del tiempo. En el caso del flujo *turbulento*, tal como en los rápidos de un río o en una caída de agua, las velocidades varían erráticamente de punto a punto así como de tiempo a tiempo.

2. *El flujo de un fluido puede ser compresible o incompresible.* Si la densidad ρ de un fluido es constante, independiente de $x, y, z,$ y t , su flujo se llama *flujo incompresible*. Puede considerarse usualmente que los líquidos fluyen incompresiblemente. Pero aun en un gas altamente compresible la variación de la densidad puede ser insignificante, y para objetos prácticos podemos considerar que el flujo es incompresible. Por ejemplo, al volar a velocidades mucho menores que la velocidad del sonido en el aire (que se describe como aerodinámica subsónica), el flujo del aire sobre las alas es casi incompresible.

3. *El flujo de los fluidos puede ser viscoso o no viscoso.* En el movimiento de los fluidos la viscosidad es el análogo de la fricción en el movimiento de los sólidos. Cuando un fluido fluye de modo que no disipe energía por medio de fuerzas viscosas, se dice que el fluido es *no viscoso*. En muchos casos, como en problemas de lubricación, la viscosidad es extremadamente importante; por ejemplo, los aceites para motor se denominan de acuerdo a su viscosidad y a su variación con la temperatura. En otros casos, la viscosidad puede ser de poca importancia relativamente, y al despreciarla podemos emplear una descripción más sencilla en términos de flujo no viscoso.

4. *El flujo de los fluidos puede ser rotatorio o no rotatorio.* Si un elemento del fluido en movimiento no gira en torno a un eje que pase por el centro de masa del elemento, se dice que el flujo es *no rotatorio*. Podemos imaginar a una pequeña rueda de paletas sumergida en el flujo en movimiento (Fig. 1). Si la rueda se mueve sin girar, el movimiento es no rotatorio; de otro modo será rotatorio. Nótese que un elemento en particular del fluido puede moverse en una trayectoria circular y experimentar también un flujo no rotatorio; una analogía es el movimiento de las góndolas colgantes de una "rueda gigante" de feria: aun cuando la rueda gire, las personas que viajan en las góndolas no giran respecto a sus centros de masa. El remolino que se forma cuando el agua fluye por el drenaje de la bañera es un ejemplo de esta clase de flujo no rotatorio.

Para simplificar la descripción matemática del movimiento de un fluido, limitaremos nuestra exposición de la dinámica de los fluidos en su mayor parte al flujo

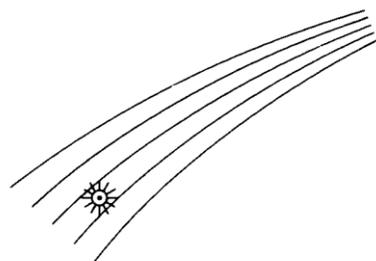


Figura 1 Una rueda de paletas pequeña que flota libremente en un líquido al fluir. Si la rueda gira, llamamos al flujo *rotatorio*; si no, el flujo es *no rotatorio*.

estacionario, incompresible, no viscoso, no rotatorio. Sin embargo, corremos el riesgo de que, con tantas suposiciones simplificantes, ya no estemos estudiando un fluido real. Además, a veces es difícil decidir si una propiedad determinada de un fluido (digamos, su viscosidad) puede ser despreciada en una situación particular. A pesar de todo esto, el análisis restringido que vamos a llevar a cabo tiene una aplicación amplia en la práctica, como veremos.

18-2 TRAYECTORIA DE UNA CORRIENTE Y LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En el flujo estacionario la velocidad v en un punto dado es constante en el tiempo. Consideremos al punto P (Fig. 2) dentro del fluido. Puesto que v en P no cambia con el tiempo en el flujo estacionario, cada partícula de fluido que llegue a P pasará con la misma velocidad y en la misma dirección. El movimiento de cada partícula que pase por P sigue entonces la misma trayectoria, llamada *línea de corriente*. Cada partícula de fluido que pase por P pasará más tarde por puntos más a lo largo de la línea de corriente, tal como Q y R en la figura 2. Además, cada partícula de fluido que pase por R debe haber pasado previamente por P y Q .

La magnitud del vector velocidad de la partícula de fluido cambiará, en general, al moverse a lo largo de la línea de corriente. La dirección del vector de la velocidad

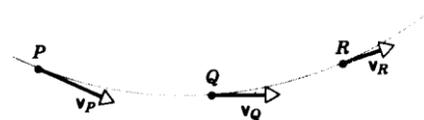


Figura 2 En el flujo estacionario, una partícula de fluido que pase por P traza una línea de corriente, pasando más tarde por los puntos Q y R corriente abajo. Cualquier otra partícula que pase por P debe seguir esta misma trayectoria.

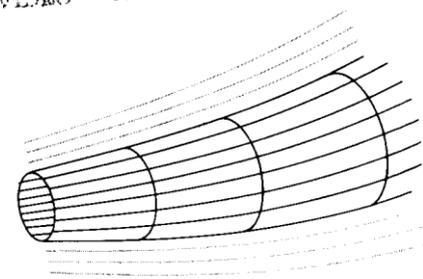


Figura 3 Un haz de líneas de corriente forma un tubo de flujo.

en cualquier punto a lo largo de la línea de corriente es siempre tangente a ella.

Dos líneas de corriente no pueden cruzarse entre sí ya que, si lo hicieran, una partícula de fluido que llegue podría seguir un camino u otro, y el flujo no podría ser estacionario. En el flujo estacionario el patrón de las líneas de corriente no cambia con el tiempo.

En principio podemos trazar una línea de una corriente a través de cada punto del fluido. Suponiendo un flujo estacionario, elegimos un número finito de líneas de corriente para formar un haz, como el patrón de líneas de corriente de la figura 3. Esta región tubular se llama *tubo de flujo*. La frontera de este tubo consiste en líneas de corriente a las cuales la velocidad de las partículas fluidas es siempre tangente. Así pues, ningún fluido puede cruzar la frontera de un tubo de flujo, y el tubo se comporta tanto como una tubería de la misma forma. El fluido que entra por un extremo debe salir por el otro.

Consideremos en detalle el flujo del fluido por un tubo de flujo como el que se muestra en la figura 4. El fluido entra en P donde el área de la sección transversal es A_1 y sale en Q donde el área es A_2 . Sea v_1 la velocidad de las partículas del fluido en P y v_2 la de las partículas en Q . En el intervalo de tiempo Δt un elemento de fluido recorre aproximadamente la distancia $v \Delta t$. Entonces el fluido que cruce A_1 en el intervalo de tiempo Δt tiene un volumen de $A_1 v_1 \Delta t$, aproximadamente. Si su densidad en esa ubicación es ρ_1 , entonces la masa de fluido Δm_1 que cruza por A_1 es, de alrededor de

$$\Delta m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t.$$

El *flujo de masa*, definido como la masa de fluido por unidad de tiempo que pasa por cualquier sección transversal, es entonces $\Delta m_1 / \Delta t = \rho_1 A_1 v_1$ en P , aproximadamente. Debemos considerar que Δt sea lo suficientemente pequeño como para que en este intervalo de tiempo ni v ni A varíen en forma considerable durante la distancia que viaja el fluido. En el límite según $\Delta t \rightarrow 0$, obtenemos el resultado preciso:

$$\text{flujo de masa en } P = \rho_1 A_1 v_1,$$

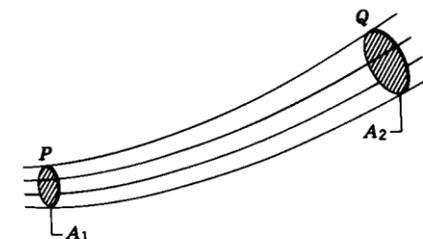


Figura 4 Un tubo de flujo que tiene un área A_1 de la sección transversal en P , y un área A_2 en Q .

y, según un análisis similar,

$$\text{flujo de masa en } Q = \rho_2 A_2 v_2,$$

donde $\rho_2, A_2,$ y v_2 representan, respectivamente, la densidad, el área de la sección transversal, y la velocidad del flujo en Q .

Hemos supuesto que el fluido entra en el tubo únicamente en P y sale únicamente en Q . Esto es, entre P y Q no existen otras "fuentes" por donde el fluido pueda entrar al tubo ni "sumideros" por donde pueda salir. Además, el flujo es estacionario, de modo que la densidad del fluido entre P y Q no cambia con el tiempo (aun cuando pueda cambiar de lugar a lugar). Entonces el flujo de masa en P debe ser igual al flujo de masa en Q :

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2, \quad (1)$$

o, en términos más generales que se refieran a cualquier ubicación en el tubo de flujo,

$$\rho A v = \text{constante}. \quad (2)$$

Este resultado expresa la *ley de conservación de la masa* en la dinámica de los fluidos.

Si el fluido es incompresible, como lo supondremos de ahora en adelante, entonces $\rho_1 = \rho_2$, y la ecuación 1 adquiere la forma más sencilla

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \quad (3)$$

o, al definir que R sea la *razón de flujo volumétrico* (o *flujo volumétrico*) $A v$,

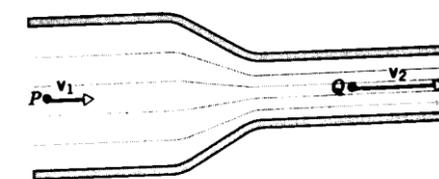


Figura 5 La velocidad debe aumentar al estrecharse el área de un tubo horizontal. Si no actúa ninguna otra fuerza sobre el fluido, la presión en P debe ser mayor que la presión en Q , de modo que en dirección PQ actúa una fuerza para proporcionar la aceleración necesaria.

$$R = Av = \text{constante.} \quad (4)$$

Las unidades de R en el SI son m^3/s . Nótese que la ecuación 3 predice que en el flujo estacionario incompresible la velocidad del flujo varía inversamente con el área de la sección transversal, siendo mayor en las partes más angostas del tubo.

La constancia del flujo volumétrico a lo largo de un tubo de flujo ofrece una interpretación gráfica importante de las líneas de la corriente, como se ve en la figura 5. En una parte angosta del tubo, las líneas de corriente deben de estar más apretadas que en una parte ancha. De aquí que, cuando la distancia entre líneas de corriente disminuya, la rapidez del fluido debe aumentar. Por lo tanto, concluimos que las líneas de corriente espaciadas indican regiones de velocidad relativamente baja, y que las líneas de corriente apretadas indican regiones de velocidad relativamente elevada.

Podemos obtener otro resultado interesante al aplicar la segunda ley de Newton para el movimiento al flujo del fluido entre P y Q (Fig. 5). Una partícula de fluido en P con una velocidad v_1 debe ser acelerada en dirección hacia adelante al adquirir la velocidad hacia adelante v_2 más elevada en Q . Esta aceleración puede provenir únicamente de una fuerza ejercida en la dirección PQ , y (si no existe ninguna otra fuerza externa, por ejemplo, la gravedad) la fuerza debe surgir de un cambio de la presión en el seno del fluido. Para proporcionar esta fuerza, la presión debe ser mayor en P que en Q . Por lo tanto, en ausencia de otras fuentes de aceleración, las regiones de mayor velocidad del fluido deben estar asociadas con presiones del fluido más bajas. En la sección siguiente, trataremos más a fondo esta conclusión preliminar respecto a la dinámica del fluido.

¿Ha formado usted parte, alguna vez, de un "fluido humano" en el que una muchedumbre de personas tratara de pasar por una puerta angosta? Hacia la parte de atrás de la muchedumbre, el área de la sección transversal es grande, la presión es grande, pero la velocidad de avance es bastante pequeña. Una vez atravesando la puerta, la muchedumbre se mueve más rápidamente: la velocidad del flujo aumenta. Este "fluido" es compresible y viscoso, y el flujo puede ser tanto rotatorio como turbulento!

Problema muestra 1 La figura 6 muestra cómo se angosta al caer la corriente de agua que sale por un grifo. El área de la sección transversal A_0 es de 1.2 cm^2 y la de A es de 0.35 cm^2 . Los dos niveles están separados por una distancia vertical h ($= 45 \text{ mm}$). ¿En qué cantidad fluye el agua de la llave?

Solución Partiendo de la igualdad del flujo volumétrico (Ec. 3) tenemos

$$A_0 v_0 = Av,$$

donde v_0 y v son las velocidades del agua a los niveles correspondientes. Partiendo de la ecuación 20 del capítulo 2 podemos

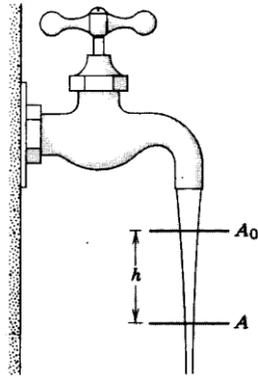


Figura 6 Problema muestra 1. Cuando el agua cae de una llave, su velocidad aumenta. Como la cantidad de flujo debe ser la misma en todas las secciones transversales, la corriente debe volverse más angosta al caer. (Se desprecian los efectos asociados con la tensión superficial.)

también escribir, puesto que cada elemento de agua está cayendo libremente debido a la gravedad,

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

Eliminando a v entre estas dos ecuaciones y resolviendo para v_0 , obtenemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^2 - A^2}} = \sqrt{\frac{(2)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.045 \text{ m})(0.35 \text{ cm}^2)^2}{(1.2 \text{ cm}^2)^2 - (0.35 \text{ cm}^2)^2}} \\ = 0.286 \text{ m/s} = 28.6 \text{ cm/s}.$$

La razón de flujo volumétrico R es entonces

$$R = A_0 v_0 = (1.2 \text{ cm}^2)(28.6 \text{ cm/s}) \\ = 34 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Con esta cantidad, tardaríamos unos 3 s en llenar un frasco de 100 mL.

La ecuación de continuidad (Opcional)

Las ecuaciones 2 y 4 son ejemplos de relaciones matemáticas conocidas como *ecuaciones de continuidad*. Una ecuación de continuidad es, en efecto, una ley de conservación de la materia. Ésta nos dice que si no existen fuentes (lugares por donde se introduzca materia nueva) ni sumideros (lugares por donde la materia que fluye pueda escapar), entonces la masa dm contenida en cualquier volumen dV debe permanecer constante. Hemos derivado estas ecuaciones para condiciones muy especiales; una ecuación de continuidad más general es

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Esta ecuación se basa en la consideración de un volumen arbitrario de *espacio* (no de fluido) $dV = dx dy dz$. El elemento de volumen permanece fijo en el espacio mientras que el fluido fluye a través de él. Los primeros tres términos, cuando se les multiplica por dV , dan el flujo de salida neto de la masa de fluido que proviene del volumen, en términos de sus componentes de velocidad v_x , v_y , y v_z . El cuarto término, de nuevo multiplicado por dV , da la cantidad a la cual está cambiando la

masa dentro del elemento de volumen. Cuando estos términos suman cero, significa que cualquier flujo de salida (o de entrada) neto de masa debe ser compensado por un cambio equivalente en la masa dentro del elemento. Una vez más, esto es precisamente un postulado de la conservación de la masa. Si el elemento de volumen dV contiene fuentes o sumideros, éstos estarían incluidos en la ecuación 5 haciendo al lado derecho igual a la cantidad a la que la materia está entrando en, o saliendo de, dV . (Las derivadas que aparecen en la ecuación 5 son derivadas parciales, porque la densidad y las componentes de la velocidad pueden ser funciones de más de una variable).

Las ecuaciones de continuidad son comunes en física y juegan un papel fundamental no solamente en la mecánica de los fluidos, sino en cualquier materia o tema en el cual intervenga un flujo. Por ejemplo, en electromagnetismo consideramos no el flujo de masa sino el flujo de carga eléctrica. Las componentes de v en la ecuación 5 son reemplazadas por componentes correspondientes de la corriente eléctrica, mientras que la densidad de masa es reemplazada por la densidad de carga. La interpretación de la ecuación no cambia, excepto que entonces se refiere a la conservación de la carga eléctrica más que a la masa. (Véanse los capítulos 27 y 32.) ■

18-3 LA ECUACIÓN DE BERNOULLI*

La ecuación de Bernoulli, que es una relación fundamental en la mecánica de los fluidos, no es un principio nuevo sino que es derivable de las leyes básicas de la mecánica newtoniana. Hallamos conveniente derivarla del teorema trabajo-energía (véase la Sec. 7-4), ya que es esencialmente un postulado del teorema trabajo-energía para el flujo de los fluidos.

Consideremos el flujo estacionario, incompresible, no viscoso y no rotatorio de un fluido a lo largo de la tubería o tubo de flujo de la figura 7. La porción de tubería que se muestra en la figura tiene una sección transversal A_1 uniforme a la izquierda. Allí es horizontal con una elevación y_1 sobre cierto nivel de referencia. Gradualmente se ensancha y eleva, y a la derecha tiene una sección transversal A_2 uniforme. Allí es horizontal en una elevación y_2 . Concentrémonos en la porción de fluido representada por los sombreados suave e intenso y llamemos a este fluido "el sistema". Consideremos luego el movimiento del sistema desde la posición mostrada en la figura 7a hasta la mostrada en la figura 7b. En todos los puntos de la parte angosta de la tubería la presión es p_1 y la velocidad v_1 ; en todos los puntos de la porción ancha la presión es p_2 y la velocidad v_2 .

El teorema trabajo-energía (véase la Ec. 19 del capítulo 7) establece: el trabajo efectuado por la fuerza resultante

* En la *Encyclopaedia Britannica* (edición undécima) figuran ocho miembros de la familia Bernoulli. Aquí nos referimos a Daniel Bernoulli (1700-1782), quizá el más notable de esta destacada familia.

que actúa sobre un sistema es igual al cambio en la energía cinética del sistema. En la figura 7 las fuerzas que efectúan un trabajo sobre el sistema, suponiendo que podamos despreciar a las fuerzas viscosas, son las fuerzas de la presión $p_1 A_1$ y $p_2 A_2$ que actúan sobre los extremos a mano izquierda y derecha del sistema, respectivamente, y la fuerza de la gravedad. Al circular el fluido por la tubería el efecto neto, como lo muestra la comparación de las figuras 7a y 7b, es elevar al fluido representado por el área de sombreado intenso de la figura 7a a la posición mostrada en la figura 7b. La cantidad de fluido representada por el sombreado suave no cambia a causa del flujo.

Podemos hallar el trabajo W efectuado sobre el sistema por la fuerza resultante como sigue:

1. El trabajo efectuado sobre el sistema por la fuerza de la presión $p_1 A_1$ es $p_1 A_1 \Delta l_1$.
2. El trabajo efectuado sobre el sistema por la fuerza de la presión $p_2 A_2$ es $-p_2 A_2 \Delta l_2$. Nótese que es negativo, porque la fuerza actúa en dirección opuesta al desplazamiento horizontal.
3. El trabajo efectuado sobre el sistema por la gravedad está asociado con la elevación del elemento de fluido en sombreado intenso desde la altura y_1 hasta la altura y_2 y es $-\Delta m g(y_2 - y_1)$ donde Δm es la masa de fluido en cualquiera de las áreas con sombreado intenso. Esta contribución es también negativa a causa de que la fuerza gravitatoria actúa en dirección opuesta al desplazamiento vertical.

El trabajo neto W efectuado sobre el sistema por todas las fuerzas se halla al sumar estos tres términos, es decir,

$$W = p_1 A_1 \Delta l_1 - p_2 A_2 \Delta l_2 - \Delta m g(y_2 - y_1).$$

Ahora bien, $A_1 \Delta l_1 (= A_2 \Delta l_2)$ es el volumen ΔV del elemento de fluido en sombreado intenso, el cual podemos escribir como $\Delta m/\rho$, en donde ρ es la densidad (constante) del fluido. Recordemos que los dos elementos de fluido tienen la misma masa, de modo que al disponer que $A_1 \Delta l_1 = A_2 \Delta l_2$ hemos supuesto que el fluido es incompresible. Con esta hipótesis tenemos

$$W = (p_1 - p_2)(\Delta m/\rho) - \Delta m g(y_2 - y_1). \quad (6)$$

El cambio en la energía cinética del elemento de fluido es

$$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2.$$

Partiendo del teorema trabajo-energía, $W = \Delta K$, y entonces tenemos

$$(p_1 - p_2)(\Delta m/\rho) - \Delta m g(y_2 - y_1) \\ = \frac{1}{2} \Delta m v_2^2 - \frac{1}{2} \Delta m v_1^2, \quad (7)$$

lo que, después de cancelar al factor común de Δm , puede reacomodarse para leerse como sigue:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2. \quad (8)$$

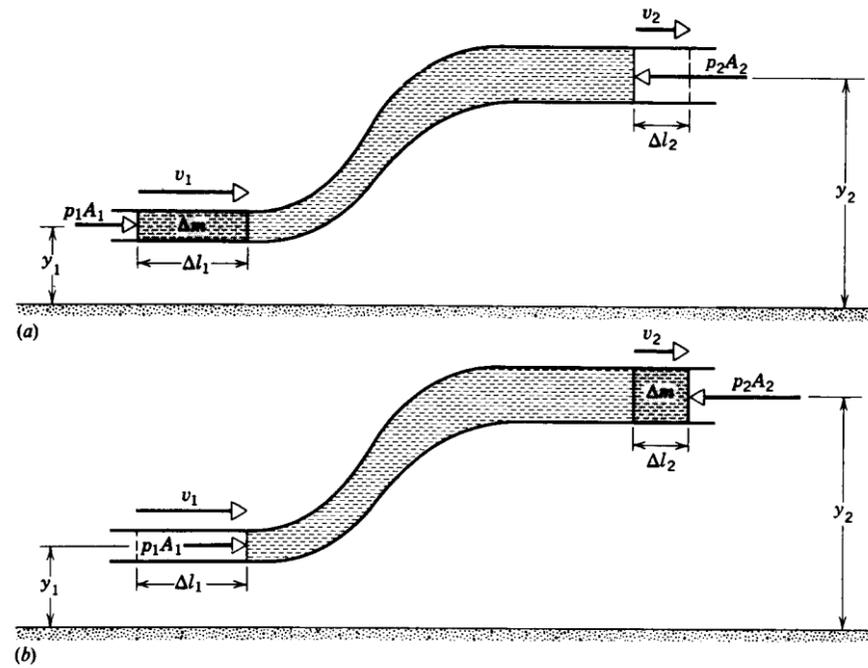


Figura 7 El fluido fluye por una tubería en forma estacionaria. Durante el intervalo de (a) a (b), el efecto neto del flujo es la transferencia del elemento de fluido indicado por el sombreado intenso desde el extremo de entrada de la tubería hasta el extremo de salida.

Puesto que los subíndices 1 y 2 se refieren a dos ubicaciones cualesquiera a lo largo de la tubería, podemos suprimir los subíndices y escribir

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{constante.} \quad (9)$$

La ecuación 9 recibe el nombre de *ecuación de Bernoulli* para el flujo estacionario, incompresible, no viscoso y no rotatorio. Fue presentada por vez primera por Daniel Bernoulli en su *Hydrodynamica* en 1738.

La ecuación de Bernoulli es estrictamente aplicable únicamente al flujo estacionario, siendo evaluadas las cantidades implicadas a lo largo de la línea de corriente. En nuestra figura, la línea de corriente usada está a lo largo del eje de la tubería. Sin embargo, si el flujo es no rotatorio puede demostrarse (véase el problema 33 para un caso especial) que la constante de la ecuación 9 es la misma para *todas* las líneas de corrientes.

Así como la estática de una partícula es un caso especial de la dinámica de la partícula, la estática de los fluidos es un caso especial de la dinámica de los fluidos. No debería sorprendernos, por lo tanto, que la ley del cambio de la presión con la altura en un fluido en reposo esté incluida en la ecuación de Bernoulli como un caso especial. Si el fluido está en reposo, entonces $v_1 = v_2 = 0$ y la ecuación 8 se convierte en

$$p_1 + \rho gy_1 = p_2 + \rho gy_2$$

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1),$$

que es la misma que la ecuación 8 del capítulo 17.

De la ecuación 8 se deduce otro resultado básico cuando $y_1 = y_2$ (es decir, la tubería es horizontal, de modo que no es preciso considerar los efectos gravitatorios). Entonces

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \quad (10)$$

Cuando la velocidad es grande, la presión debe ser pequeña, y a la inversa. Éste es el postulado matemático que confirma la conclusión de lo expuesto como consecuencia de la ecuación 4. En la ecuación 9 todos los términos tienen la dimensión de una presión (lo cual debe usted verificar). La presión $p + \rho gy$, la cual estaría presente aun cuando no hubiese flujo ($v = 0$), se llama *presión estática*; el término $\frac{1}{2}\rho v^2$ se denomina *presión dinámica*.

La ecuación de Bernoulli es en efecto un postulado de la conservación de la energía mecánica en un sistema. En analogía con nuestro tratamiento de la conservación de la energía en el capítulo 8, podemos reescribir la ecuación 7 como:

$$\Delta K + \Delta U = W,$$

donde los tres términos se refieren, respectivamente, a los cambios en las energías cinética y potencial y al trabajo efectuado por la fuerza de la presión, siendo consideradas

todas las cantidades por unidad de volumen del fluido. Si el fluido es compresible, puede adquirir energía interna por medios mecánicos; por ejemplo, la fuerza de la presión puede empujar a las moléculas acercándolas más, aumentando por lo tanto su energía potencial interna. Entonces en un fluido compresible deberíamos incluir otro término ΔE_{int} correspondiente al cambio en la energía interna por unidad de volumen, y el postulado de la conservación de la energía se convierte en

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = W.$$

Este resultado es idéntico a la ecuación 28 del capítulo 8. Si, además, el flujo es viscoso, las fuerzas similares a la fricción realizan un trabajo que puede parecer como un aumento en la energía interna del fluido.

En la práctica, podemos modificar a la ecuación de Bernoulli como sea necesario para justificar la conversión de la energía mecánica del fluido en energía interna. Si el flujo puede considerarse como aproximadamente incompresible y no viscoso, estas correcciones son despreciables.

Problema muestra 2 Un tanque elevado de altura $h = 32$ m y diámetro $D = 3.0$ m abastece de agua a una casa (Fig. 8). Una tubería horizontal en la base del tanque tiene un diámetro $d = 2.54$ cm (1 in, típico de las tuberías de abastecimiento doméstico en Estados Unidos). Para satisfacer las necesidades del hogar, la tubería de abastecimiento debe ser capaz de sustituir agua a razón de $R = 0.0025$ m³/s (alrededor de $\frac{2}{3}$ de galón por segundo). (a) Si el agua estuviese fluyendo a la cantidad máxima, ¿cuál sería la presión en la tubería horizontal? (b) Una tubería más pequeña, de diámetro $d' = 1.27$ cm (= 0.5 in) abastece al segundo piso de la casa, a una distancia de 7.2 m sobre el nivel del suelo. ¿Cuáles son la velocidad del flujo y la presión del agua en esta tubería? Desprecie la viscosidad del agua.

Solución (a) Aplicamos la ecuación de Bernoulli a lo largo de la línea de flujo ABC mostrada en la figura 8. En los puntos A y B tenemos

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho gy_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho gy_B.$$

En A, la presión es la de la atmósfera, p_0 . Con $y_A = h$ y $y_B = 0$, obtenemos, para la presión desconocida,

$$p_B = p_0 + \rho gh + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2).$$

Podemos hallar v_A y v_B a partir de la igualdad del flujo volumétrico (Ec. 4), lo que nos da

$$v_A A_A = v_B A_B = R,$$

donde R es la cantidad de flujo volumétrico constante. Entonces

$$v_A = \frac{R}{A_A} = \frac{0.0025 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(1.5 \text{ m})^2} = 3.5 \times 10^{-4} \text{ m/s},$$

$$v_B = \frac{R}{A_B} = \frac{0.0025 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0.0127 \text{ m})^2} = 4.9 \text{ m/s}.$$

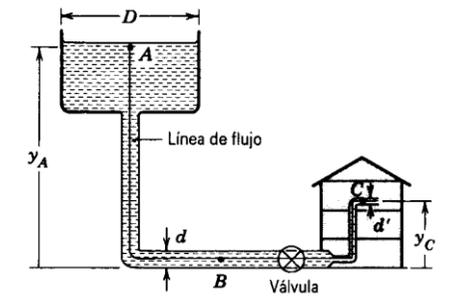


Figura 8 Problema muestra 2.

Obsérvese que el término $\frac{1}{2}\rho v_A^2$ en la expresión para p es despreciable comparado con el término $\frac{1}{2}\rho v_B^2$. Esto es, la velocidad del flujo en la parte superior del tanque es bastante pequeña, debido a la gran área de su sección transversal.

Ahora podemos resolver para la presión en la tubería:

$$\begin{aligned} p_B &= p_0 + \rho gh - \frac{1}{2}\rho v_B^2 \\ &= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + (1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(32 \text{ m}) \\ &\quad - \frac{1}{2}(1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(4.9 \text{ m/s})^2 \\ &= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} + 3.14 \times 10^5 \text{ Pa} - 0.12 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 4.03 \times 10^5 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Si el agua de la tubería horizontal no estuviese fluyendo (esto es, si la válvula estuviese cerrada), la presión *estática* en B incluiría únicamente a los primeros dos términos de arriba, lo cual daría 4.15×10^5 Pa. La presión cuando el agua fluye se reduce de este valor estático a la cantidad de la presión dinámica.

(b) Si la tubería más angosta al segundo piso ha de tener la misma cantidad de flujo R , la velocidad en C debe ser

$$v_C = \frac{R}{A_C} = \frac{0.0025 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0.0064 \text{ m})^2} = 19.7 \text{ m/s},$$

o cuatro veces el valor en B. La ecuación de Bernoulli da

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho gy_A = p_C + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho gy_C$$

$$\begin{aligned} p_C &= p_0 + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_C^2) + \rho g(y_A - y_C) \\ &= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} - \frac{1}{2}(1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(19.7 \text{ m/s})^2 \\ &\quad + (1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(32 \text{ m} - 7.2 \text{ m}) \\ &= 1.01 \times 10^5 \text{ Pa} - 1.95 \times 10^5 \text{ Pa} + 2.43 \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 1.49 \times 10^5 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

A causa de la mayor velocidad del flujo a lo largo de la tubería más pequeña, la contribución dinámica a la presión es mucho mayor en C que en B. Los efectos tanto estáticos como dinámicos tienden a reducir la presión en ese punto con relación a B.

18-4 APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI Y DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

En esta sección consideraremos un número de aplicaciones de la ecuación de Bernoulli, que ilustran su uso y demuestran la amplitud de su aplicabilidad.

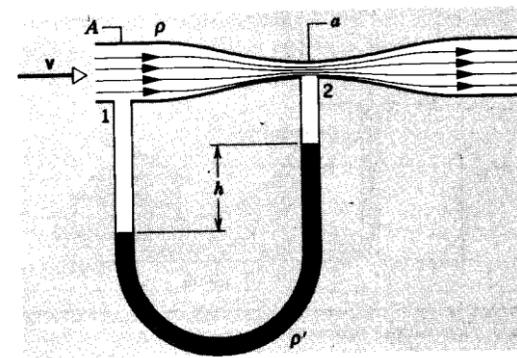


Figura 9 Un medidor de Venturi, usado para medir la velocidad del flujo de un fluido en una tubería.

El medidor de Venturi

Este aparato (Fig. 9) es un medidor de la velocidad del flujo de un fluido en una tubería. Un fluido de densidad ρ fluye por una tubería de área de su sección transversal A . El área se reduce a a en el cuello, y allí se acopla un tubo manométrico, como se muestra. Hagamos que el líquido del manómetro, digamos mercurio, tenga una densidad ρ' . Al aplicar la ecuación de Bernoulli y la igualdad del flujo volumétrico en los puntos 1 y 2, puede demostrarse (véase el problema 31) que la velocidad del flujo en el punto 1 es

$$v = a \sqrt{\frac{2(\rho' - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}} \quad (11)$$

El tubo de Pitot

Este aparato (Fig. 10) se usa para medir la velocidad del flujo de un gas. Consideremos que el gas (por ejemplo, aire) fluye con una densidad ρ y una velocidad v_a paralelas a los planos de las aberturas en a . La presión en el brazo izquierdo del manómetro, que está conectado a estas aberturas, es entonces la presión estática en la línea de gas, p_a . La abertura del brazo derecho del manómetro está en ángulo recto con la corriente. La velocidad se reduce a cero en b , y el gas está estancado en ese punto. Al aplicar la ecuación de Bernoulli a los puntos a y b , obtenemos

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 = p_b$$

Sustituyendo la lectura $\rho'gh$ del manómetro por la diferencia de presión $p_b - p_a$, podemos resolver para v_a y obtener

$$v_a = \sqrt{\frac{2gh\rho'}{\rho}} \quad (12)$$

Este aparato puede calibrarse para que dé una lectura de v_a directamente. El indicador de la velocidad del aire que

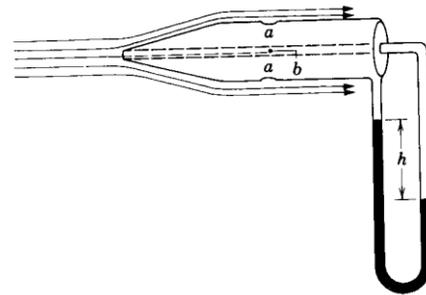


Figura 10 Tubo de Pitot, que se emplea para medir la velocidad del flujo de un gas.

se encuentra en las puntas de las alas de un aeroplano se basa en este principio.

La fuerza ascensional

Es la fuerza que actúa sobre un cuerpo, como puede ser el ala de un aeroplano, una hidroala, o las aspas de un helicóptero, en virtud de su movimiento en el seno del fluido. Ésta es distinta a la fuerza ascensional estática, que es la fuerza de flotabilidad que actúa sobre un globo o sobre un iceberg de acuerdo con el principio de Arquímedes (sección 17-4).

En el vuelo de una bola de béisbol, de una pelota de tenis, o de una pelota de golf tenemos ejemplos comunes de fuerza ascensional dinámica. Ésta, que se origina con la rotación de la pelota al volar, puede hacer que la pelota trace una curva o que ascienda o descienda con relación a una trayectoria parabólica. Puesto que el fluido (el aire en este caso) es un tanto viscoso, existe fricción a medida que la pelota avanza, y ésta tiende a transportar consigo una capa delgada de fluido llamada *capa frontera*. Vista desde el marco de reposo de una pelota que no gire, la velocidad del fluido desciende del valor más allá de la capa frontera (igual a la velocidad de vuelo de la pelota) a cero en la superficie de la pelota.

La figura 11a muestra, en el marco de reposo de la pelota, líneas de corrientes del flujo estacionario del aire al pasar por una pelota no rotatoria, a velocidades lo suficientemente bajas como para que no exista turbulencia. La figura 11b muestra las líneas de corriente de aire que acompañan a una pelota que gira rápidamente. Sin la viscosidad y sin la capa frontera, la bola, al girar, no puede transportar así aire a su alrededor y esta circulación (como se le llama) no existiría. Las pelotas de golf son sistemáticamente rugosas gracias a los hoyuelos que tienen para aumentar esta circulación y la fuerza ascensional dinámica que resulta de ello. Las bolas de béisbol a veces se raspan artificialmente (Lo cual no está permitido por las reglas del juego) por los lanzadores, por la misma razón.

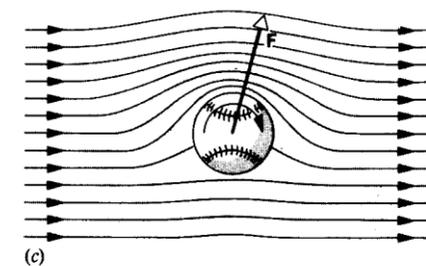
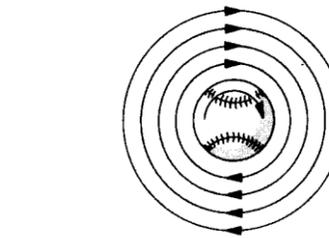
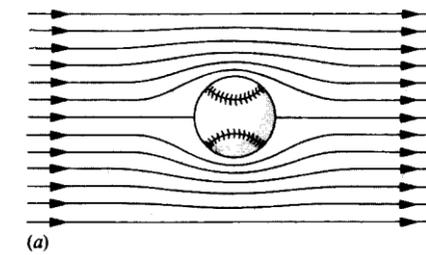


Figura 11 (a) Flujo de líneas de corriente alrededor de una pelota que no gira. (b) La circulación del aire alrededor de una pelota que gira, como consecuencia de la capa frontera. El espesor de la capa frontera se ha exagerado aquí a propósito. (c) Los efectos combinados de ambos movimientos. Partiendo de la ecuación de Bernoulli vemos que una fuerza ascensional dinámica actúa hacia arriba sobre la pelota. El fluido ejerce sobre la pelota una fuerza neta F que tiene una componente transversal al flujo del fluido (ascenso) y una componente paralela al flujo del fluido (arrastre).

La figura 11c muestra el efecto de combinar la circulación (resultante de la rotación de la pelota) y el flujo estacionario (resultante de la traslación de la pelota por el aire). En el caso mostrado, las dos velocidades se suman en la parte de arriba de la pelota y se restan en la parte de abajo. A partir del espaciamento de las líneas de corriente resultantes, vemos que la velocidad del aire debajo de la pelota es menor que la de encima de ella. Según la ecuación de Bernoulli, la presión del aire debajo de la pelota debe entonces ser mayor que la de encima, de modo que la pelota experimenta una fuerza de sustentación dinámica.

Esencialmente, una bola de béisbol lanzada se curva en su trayectoria por la misma razón. Por ejemplo, si la figura 11 representa una vista desde arriba de la bola que

gira mientras avanza hacia el bateador, el "ascenso" actúa en dirección hacia un lado para mover a la bola horizontalmente hacia el bateador o alejándose de él, como en el caso de una bola curva. Si la figura 11 representa una vista lateral, la bola es lanzada con contragiro, como en el caso de una bola rápida. La fuerza ascensional actúa hacia arriba, provocando que la bola se eleve con relación a su trayectoria parabólica.

La fuerza de ascenso que actúa sobre el ala de un aeroplano tiene una explicación parecida. La figura 12 muestra las líneas de corriente alrededor de un plano aerodinámico (o sección transversal del ala) adosado a un aeroplano. Elijamos al aeroplano como marco de referencia, como haríamos en el experimento en un túnel de viento, y supongamos que el aire se mueve de izquierda a derecha al pasar por el ala. Obsérvense las similitudes entre las figuras 12 y 11c. (De hecho, la explicación de la fuerza ascensional sobre el ala de un aeroplano implica una circulación similar a la Fig. 11b.)

El *ángulo de ataque* del ala provoca que el aire se desvíe hacia abajo. De la tercera ley de Newton la reacción de esta fuerza hacia abajo del ala sobre el aire es una fuerza hacia arriba F , el ascenso, que el aire ejerce sobre el ala.

Si bien la sola ecuación de Bernoulli no puede servir para predecir el patrón de las líneas de corriente alrededor de un plano aerodinámico, esta ecuación puede emplearse para verificar que sobre el plano aerodinámico se ejerce una fuerza de ascenso. Encima del ala (punto 1) las líneas de corriente están más cerca entre sí que lo están debajo del ala (punto 2). Entonces $v_1 > v_2$ y, según el principio de Bernoulli, $p_1 < p_2$, lo que debe ser así para que exista elevación.*

Empuje sobre un cohete

Como ejemplo final calculemos el empuje sobre un cohete producido por el escape de los gases que expele. Consideremos una cámara (Fig. 13) de sección transversal A llena de un gas de densidad ρ a una presión p . En el fondo de la cámara se encuentra un pequeño orificio de área de

* Para mayor información sobre cómo vuelan los aeroplanos, véase "The Science of Flight", por Peter P. Wegener, *American Scientist*, mayo-junio de 1986, pág. 268. Véase también "Bernoulli's Law and Aerodynamic Lifting Force", por Klaus Weltner, *The Physics Teacher*, febrero de 1990, pág. 84. La fuerza ascensional dinámica se trata en "Physics and Sports: The Aerodynamics of Projectiles", por Peter J. Brancazio, en *Fundamentals of Physics*, 3a. edición, por David Halliday y Robert Resnick (Wiley, 1988). La fuerza ascensional dinámica puede emplearse también para proveer una fuerza horizontal que impulse a un navío; véase "The Flettner Ship", por Albert Einstein, en *Essays in Science* (Philosophical Library, 1955), pág. 92.

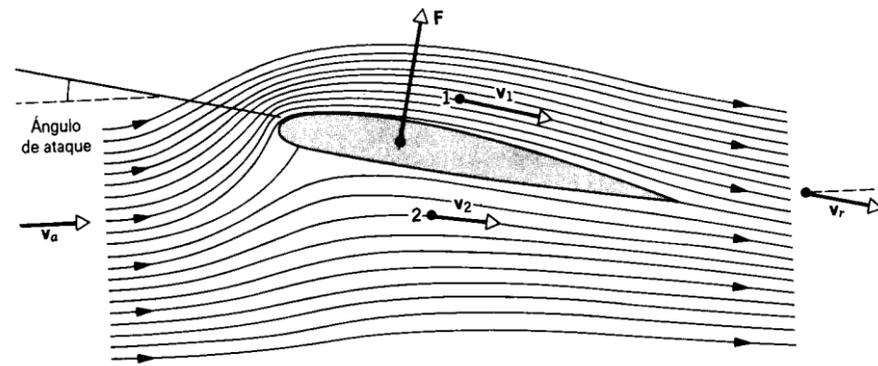


Figura 12 Las líneas de corriente alrededor de un plano aerodinámico o ala de un aeroplano. La velocidad v_a del aire que se aproxima es horizontal, mientras que el aire que se aleja del plano aerodinámico tiene una velocidad v_r , con una componente hacia abajo. El plano aerodinámico ha ejercido entonces una fuerza hacia abajo sobre el aire, y según la tercera ley de Newton, el aire debe haber ejercido por tanto una fuerza hacia arriba sobre el plano aerodinámico. Esta fuerza hacia arriba está representada por la fuerza ascensional F .

sección transversal A_0 . Deseamos hallar la velocidad v_0 a la cual escapa el gas por el orificio.

Escribamos la ecuación de Bernoulli (Ec. 8) así:

$$p - p_0 = \rho g(y_0 - y) + \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2),$$

donde p_0 representa a la presión atmosférica justamente afuera del orificio. En un gas la densidad es tan pequeña que podemos despreciar la variación de presión por la altura de la cámara, lo que nos da

$$p - p_0 = \frac{1}{2}\rho(v_0^2 - v^2)$$

o

$$v_0^2 = \frac{2(p - p_0)}{\rho} + v^2, \quad (13)$$

donde v es la velocidad del gas que fluye dentro de la cámara y v_0 es la velocidad del gas que pasa por el orificio. Si bien un gas es compresible y el flujo puede volverse turbulento, podemos considerar al flujo como estacionario e incompresible para presiones y velocidades de salida que no sean demasiado grandes.

Supongamos ahora una continuidad en el flujo de masa (en el motor de un cohete esto se consigue cuando la masa del gas que escapa es igual a la masa del gas que se origina al quemar el combustible), de modo que (para una densidad supuesta constante)

$$Av = A_0v_0.$$

Si el orificio es muy pequeño de modo que $A_0 \ll A$, entonces $v_0 \gg v$, y podemos despreciar a v^2 en comparación con v_0^2 en la ecuación 13. De aquí que la velocidad de escape sea

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}. \quad (14)$$

Si nuestra cámara es la cámara de escape de un cohete, el empuje sobre el cohete (sección 9-8) es $v_0 dM/dt$. Pero la masa del gas que fluye hacia afuera en el tiempo dt es $dM = \rho A_0 v_0 dt$, de modo que

$$v_0 \frac{dM}{dt} = v_0 \rho A_0 v_0 = \rho A_0 v_0^2,$$

y al usar la ecuación 14 el empuje es

$$v_0 \frac{dM}{dt} = 2A_0(p - p_0). \quad (15)$$

18-5 CAMPOS DE FLUJO (Opcional)

En la sección 16-7 vimos cómo representar la situación en las proximidades de las masas al usar un campo gravitatorio. Cada punto del campo puede considerarse como si tuviera un vector asociado con él, digamos, \mathbf{g} , la fuerza gravitatoria por unidad de masa en ese punto. Podemos llevar a cabo una representación gráfica del campo trazando líneas en dirección del campo cuyo espaciamiento sea proporcional a la intensidad del campo. Emplearemos un enfoque similar cuando estudiemos el campo eléctrico en el capítulo 28.

Del mismo modo, en la dinámica de los fluidos podemos resumir la situación dentro de un fluido en movimiento por medio de un campo de flujo. En general, el campo de flujo es un campo *vectorial*. Asociamos una cantidad vectorial a cada

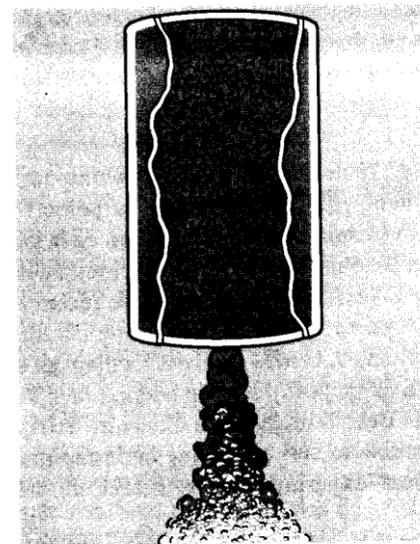


Figura 13 Corriente de fluido que se sale de una cámara, que podría representar a la cámara de escape de un cohete.

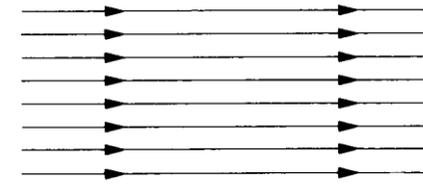


Figura 14 Líneas de corriente (líneas horizontales) en un campo de flujo no viscoso, homogéneo.

punto en el espacio, es decir, la velocidad de flujo \mathbf{v} en ese punto. En un flujo estacionario el campo de flujo es estacionario. Por supuesto, aun en este caso, determinada partícula de fluido en particular puede incluso tener una velocidad variable al moverse de punto a punto del campo. El campo ofrece algunas de las propiedades del flujo, y podemos usarlo para deducir el comportamiento de las partículas en movimiento.*

Una masa de fluido puede siempre, al fluir, dividirse en tubos de flujo. Cuando el flujo es estacionario, los tubos permanecen sin cambiar de forma, y el fluido que ya está en un tubo permanece a partir de entonces adentro del mismo tubo. Hemos visto que la velocidad del flujo dentro de un tubo de flujo es paralela al tubo y tiene una magnitud inversamente proporcional al área de la sección transversal (Ec. 2). Asignemos secciones transversales a los tubos de modo que la constante de proporcionalidad sea la misma para todos ellos; de ser posible tomaremos a esta constante como la unidad. Es decir, el flujo volumétrico es el mismo para todos los tubos, es decir, un flujo unitario. Entonces la magnitud de la velocidad de flujo puede ser determinada a partir de las áreas de las secciones transversales de los tubos de flujo. Existe otro procedimiento equivalente a éste que consiste en colocar un área unitaria perpendicular a la dirección de flujo y trazar a través de él tantas líneas de corriente como el número de unidades de magnitud de la velocidad en ese punto.

Consideremos algunos ejemplos de campos de flujo. Para propósitos de trazo tomaremos en cuenta únicamente dos ejemplos bidimensionales. En ellos, la velocidad de flujo es la misma en todos los puntos de una línea perpendicular al plano en cualquier punto.

En la figura 14 hemos trazado un *campo de flujo homogéneo*, igual que el que podría existir en el flujo estacionario, no viscoso de un líquido por un tubo con paredes interiores lisas. Aquí todas las líneas de corriente son paralelas, y la velocidad de flujo v es la misma en todos los puntos.

En la figura 15 mostramos un campo de *flujo rotatorio uniforme*, tal como el que se produciría haciendo girar a una cubeta de agua sobre una mesa giratoria (véase el problema 29, capítulo 17). Aquí v es proporcional a r , porque la velocidad angular ω es constante. En la figura 16 trazamos el campo de flujo de un *torbellino* (o remolino), tal como el que podría obtenerse al destapar una bañera llena de agua. En este caso v es proporcional a $1/r$, porque el ímpetu angular $L = mvr$ es

* Si el flujo es no rotatorio al mismo tiempo que estacionario, lo denominamos *flujo potencial*. Entonces, la velocidad de flujo \mathbf{v} puede ser relacionada con un potencial de velocidad ψ , del mismo modo que, en la gravitación, \mathbf{g} puede ser relacionada con el potencial gravitatorio V (véase la sección 16-7). De aquí que un campo vectorial para el flujo potencial sea análogo a un campo de una fuerza conservativa.

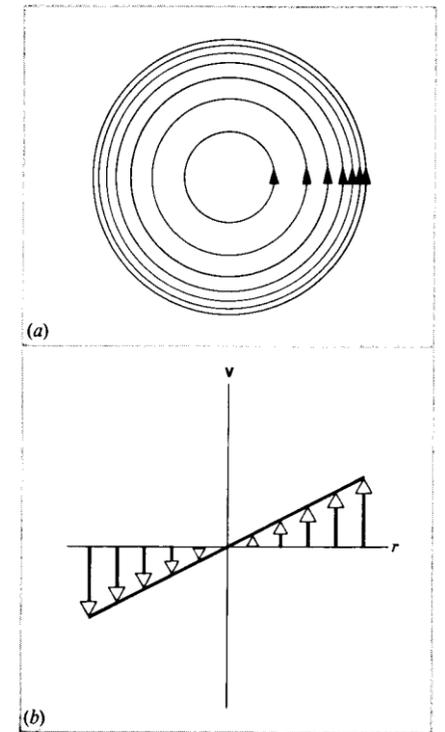


Figura 15 (a) Campo de flujo rotatorio uniforme. (b) Variación de la velocidad del fluido a partir del centro.

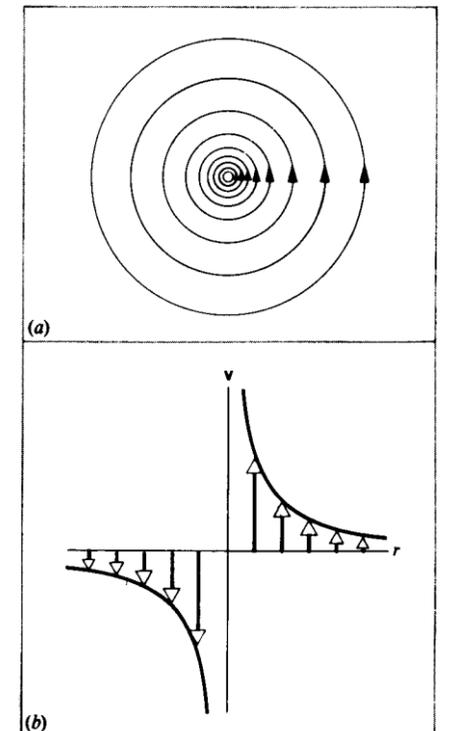


Figura 16 (a) Campo de flujo de un torbellino. (b) Variación de la velocidad del fluido a partir del centro.

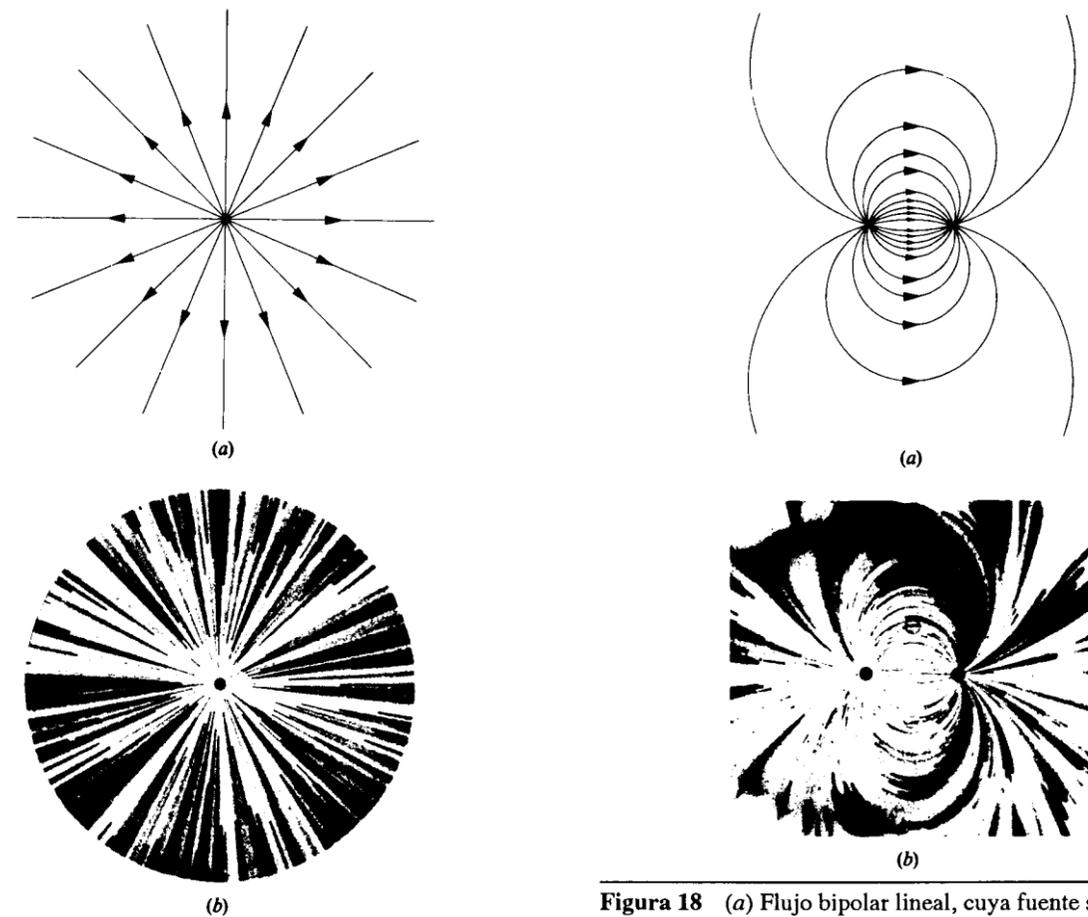


Figura 17 (a) Flujo de una fuente lineal. (b) Mapa del flujo del fluido a partir de una fuente lineal. El mapa se forma permitiendo que el agua fluya entre una capa horizontal de vidrio laminado y una capa horizontal de yeso. El agua pasa por un orificio en el centro y sale fluyendo hacia los bordes. La dirección del flujo se hace visible rociando al yeso con cristales de permanganato de potasio, el cual se disuelve en el agua y la tinte de color púrpura. El mapa del flujo del fluido fue elaborado y fotografiado por el profesor A. D. Moore en la Universidad de Michigan y está tomado de *Introduction to Electric Fields*, por W. E. Rogers (McGraw-Hill, 1954).

constante, y el flujo es no rotatorio (véase el problema 36). Nótese que tanto la rotación uniforme como el movimiento de un torbellino se representan con líneas de corriente circulares pero son clases de flujo por completo diferentes. Obviamente, las formas de las líneas de la corriente dan sólo una información limitada; es necesario conocer también su espaciamento.

La figura 17 representa el campo de flujo de una fuente. Todas las líneas de corriente se dirigen hacia afuera en forma radial. La fuente es una línea que pasa por el centro perpendicular al papel. La intensidad de una fuente se especifica dando la masa por la unidad de tiempo de emisión. El campo de flujo alrededor de un sumidero lineal es el mismo que el de una fuente excepto por el signo del flujo, que se dirige radialmente hacia adentro.

Figura 18 (a) Flujo bipolar lineal, cuya fuente se halla a la izquierda; el sumidero está a la derecha. (b) Mapa del flujo del fluido en un bipolo lineal, construido como se describe para la figura 17.

En una fuente lineal y en un sumidero lineal que tengan las mismas fuerzas y estén ligeramente separados, obtenemos el campo combinado llamado flujo bipolar lineal, que se muestra en la figura 18.

Según veremos más adelante, el campo electrostático, el campo magnético, y el campo de flujo de una corriente eléctrica son también campos vectoriales. En este aspecto, el campo homogéneo (Fig. 14) corresponde al campo eléctrico de un condensador (o capacitor) plano, el campo de la fuente o el campo del sumidero (Fig. 17) corresponden al campo eléctrico de un condensador cilíndrico o a un alambre recto de carga positiva o negativa, respectivamente, y el campo bipolar lineal (Fig. 18) corresponde al campo eléctrico de dos alambres opuestamente cargados. En todos ellos el campo de flujo es un flujo potencial, y los campos eléctricos son conservativos.

El campo homogéneo de la figura 14 representa también al campo magnético dentro de un solenoide. El campo vertiginoso de la figura 16 representa al campo magnético alrededor de un alambre recto portador de corriente. Este último es un ejemplo de campo que es rotatorio (respecto al eje del vertiginoso).

A causa de estas analogías entre el campo fluido y el electromagnético, a menudo podemos determinar un campo de flujo difícil de calcular por los métodos matemáticos actuales, por

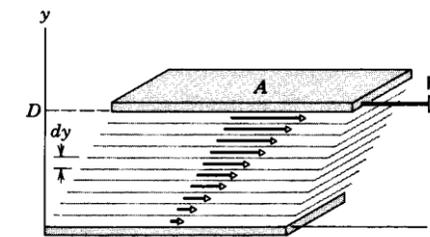


Figura 19 Un fluido viscoso llena el espacio entre dos placas planas separadas por una distancia D . La placa inferior está en reposo y la placa superior se mueve hacia la derecha con una fuerza constante F . La velocidad de cada capa de fluido disminuye uniformemente desde la placa superior hasta la placa inferior.

medio de mediciones experimentales en aparatos eléctricos apropiados.

Como hemos visto a lo largo de este capítulo, las ideas básicas del campo y los principios de conservación hallan aplicación en muchas áreas de la física, y nos encontraremos con ellos muchas veces más todavía. ■

18-6 VISCOSIDAD, TURBULENCIA, Y FLUJO CAÓTICO (Opcional)

La viscosidad en el flujo de los fluidos es similar a la fricción en el movimiento de los cuerpos sólidos. Al deslizar a un cuerpo sólido sobre otro, debemos proporcionar una fuerza externa F que se oponga a la fuerza de rozamiento f si queremos mantener al cuerpo en movimiento a velocidad constante. En el caso del movimiento de los fluidos podemos considerar a un fluido entre dos placas paralelas, como se ilustra en la figura 19. Una fuerza F está aplicada a la placa superior, de modo que esté en movimiento a velocidad constante v respecto a la placa inferior, la cual suponemos está en reposo. La fuerza F se opone al arrastre viscoso de la placa superior para mantener constante su velocidad.

Podemos imaginar que el fluido está dividido en capas paralelas a las placas. La viscosidad actúa no solamente entre el fluido y la placa superior, sino entre cada capa de fluido y sobre las capas adyacentes. La velocidad de cada capa difiere en una

TABLA 1 VISCOSIDAD DE UNA SELECCIÓN DE FLUIDOS

Fluido	η (N · s/m ²)
Glicerina (20° C)	1.5
Aceite para motores† (0° C)	0.11
Aceite para motores† (20° C)	0.03
Sangre (37° C)	4.0×10^{-3}
Agua (20° C)	1.0×10^{-3}
Agua (90° C)	0.32×10^{-3}
Gasolina (20° C)	2.9×10^{-4}
Aire (20° C)	1.8×10^{-5}
CO ₂ (20° C)	1.5×10^{-5}

† Peso medio (S.A.E. 30).

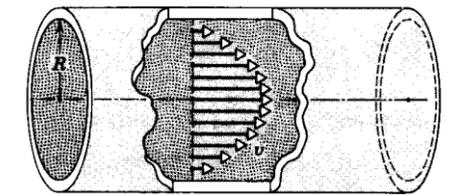


Figura 20 El fluido fluye por un tubo cilíndrico de radio R . Se muestra la variación en la velocidad desde la pared hasta el centro.

cantidad dv de la velocidad de la que está bajo ella. El flujo del fluido en el que la velocidad varía capa a capa se denomina flujo *estacionario*. En esta exposición, suponemos que la capa de fluido más alta tiene la misma velocidad v que la placa de arriba y que la capa de fluido del fondo tiene la misma velocidad que la placa del fondo, es decir, cero.

Por analogía con el esfuerzo cortante aplicado a los sólidos (Sec. 14-5), podemos definir que el esfuerzo cortante sobre el fluido es F/A , donde A es el área de la capa de fluido. Un sólido puede responder a este esfuerzo cortante con un cambio en su forma (la deformación al corte, la cual es un desplazamiento lateral a través de cada capa), pero un fluido responde mediante el movimiento, o sea, mediante un cambio de velocidad dv a través de cada capa de espesor dy . La razón entre el esfuerzo y la deformación en el fluido se llama *coeficiente de viscosidad* η (letra griega eta) del fluido:

$$\eta = \frac{F/A}{dv/dy} \quad (16)$$

Según nuestra hipótesis de que la capa superior se mueve a velocidad v y que la capa del fondo lo hace a $v = 0$, el *gradiente de velocidad* dv/dy es simplemente v/D , donde D es el espaciamento entre las dos placas. Así,

$$\eta = \frac{F/A}{v/D} = \frac{FD}{vA} \quad (17)$$

La unidad SI de la viscosidad es el $N \cdot s/m^2$. La unidad cegesimal equivalente es la dina · s/cm², llamada *poise*. (La unidad recibe el nombre en memoria del fisiólogo francés Jean-Louis-Marie Poiseuille, quien fue el primero en investigar el flujo de los fluidos viscosos por de tubos, como una ayuda para entender la circulación de la sangre.) Al comparar estas unidades vemos que 1 poise = 0.1 N · s/m². La tabla 1 muestra algunos valores típicos de la viscosidad de los fluidos.

Una aplicación práctica de la viscosidad tiene lugar en el flujo de fluidos en tuberías cilíndricas. El flujo es de nuevo estacionario, pero en este caso las capas del fluido son cilindros de paredes delgadas de radios diversos. La velocidad del flujo varía con el radio; su valor máximo se da en el eje y su valor mínimo, que suponemos es cero, en las paredes (Fig. 20). Nótese que el flujo ilustrado en la figura 20 es rotatorio, aunque los elementos del fluido viajen en línea recta. Si colocásemos una pequeña rueda de paletas en cualquier parte del flujo, excepto a lo largo de la línea de corriente central, se pondría a girar debido a la variación en la velocidad de las partículas fluidas que inciden en sus paletas.

En el caso de un tubo cilíndrico, como se muestra en la figura 20, la variación de la velocidad con la posición a lo largo del tubo no es lineal. Suponiendo, una vez más, que la capa cercana a las paredes esté en reposo, puede demostrarse que la velocidad en el cuerpo cilíndrico de radio r es (véase el problema 41)

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad (18)$$

donde v_0 es la velocidad en el centro del tubo. En términos de la diferencia de presión Δp a largo de la longitud L del tubo, la velocidad central es

$$v_0 = \frac{\Delta p R^2}{4\eta L}. \quad (19)$$

Al considerar el flujo en cada cuerpo cilíndrico delgado, podemos demostrar (véase el problema 42) que el flujo de masa total dm/dt (la masa del fluido que fluye por el tubo por unidad de tiempo) es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho \pi R^4 \Delta p}{8\eta L}. \quad (20)$$

Este resultado se conoce como la *ley de Poiseuille*. Conociendo el coeficiente de viscosidad del fluido, podemos entonces determinar la diferencia de presión que debe proveer un agente externo (una bomba, quizás) para mantener determinado flujo de masa en el tubo. En forma equivalente, si forzamos al fluido a lo largo de un tubo con una diferencia de presión conocida, la medición del flujo de masa nos permite determinar el coeficiente de viscosidad del fluido.

La viscosidad en los líquidos se origina por las fuerzas de cohesión intermoleculares. Al aumentar la temperatura, el coeficiente de viscosidad de un líquido disminuye, porque la energía cinética creciente de las moléculas debilita el efecto de las fuerzas intermoleculares. Al contrario, en los gases la viscosidad aumenta con el aumento de la temperatura, porque las propias moléculas pueden desplazarse entre las capas. A temperaturas más elevadas, existe más movimiento molecular y por lo tanto más mezclado. Sin embargo, nótese que en un tubo existen siempre más moléculas lentas cerca de las paredes que moléculas rápidas cerca del eje central, de modo que mayor mezcla significa siempre más moléculas lentas que se mueven hacia el eje e impiden el movimiento de las moléculas que se mueven más rápidamente. (El efecto es parecido al del tráfico lento cuando se mezcla en el carril rápido de una carretera.)

Problema muestra 3 Por un tubo de sección transversal circular se bombea aceite de castor, el cual tiene una densidad de $0.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ a la temperatura ambiente, por medio de una bomba que mantiene una presión de medición de 950 Pa. El tubo tiene un diámetro de 2.6 cm y una longitud de 65 cm. El aceite de castor que sale por el extremo libre del tubo a la presión atmosférica se junta en un recipiente. Después de 90 s, se ha juntado un total de 1.23 kg. ¿Cuál es el coeficiente de viscosidad del aceite de castor a esta temperatura?

Solución El flujo de masa es

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1.23 \text{ kg}}{90 \text{ s}} = 0.0137 \text{ kg/s}.$$

El coeficiente de viscosidad puede obtenerse ahora directamente de la ecuación 20 si resolvemos primero para η , que nos da

$$\eta = \frac{\rho \pi R^4 \Delta p}{8(dm/dt)L} = \frac{(0.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)\pi(0.013 \text{ m})^4(950 \text{ Pa})}{8(0.0137 \text{ kg/s})(0.65 \text{ m})} = 1.15 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2.$$

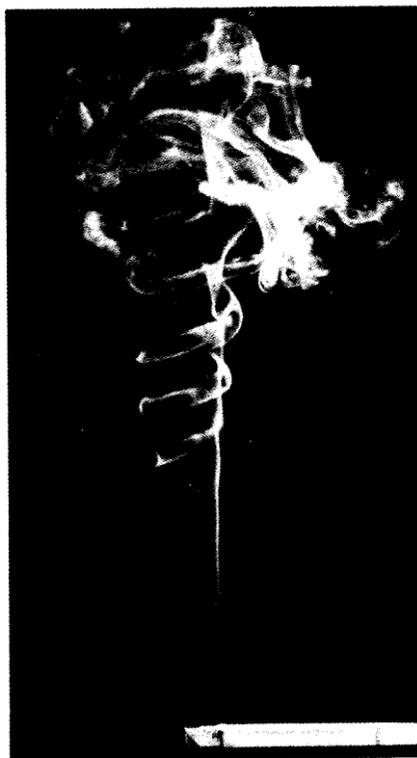


Figura 21 El humo que asciende tiene primeramente un flujo estacionario, pero no tarda en convertirse en turbulento.

Los aceites pesados tienen típicamente viscosidades dentro de este margen.

Turbulencia

Después de elevarse a corta distancia, la columna suave de humo de un cigarrillo se fragmenta en un patrón irregular y en apariencia caprichoso (Fig. 21). De modo similar, una corriente de fluido que pase a través de un obstáculo se rompe en remolinos y torbellinos (Fig. 22), que dan al flujo componentes de velocidad irregulares transversales a la dirección del flujo. Un ejemplo de este caso es el ondear de una bandera al viento: si el flujo de aire fuese estacionario, la bandera ocuparía una posición fija a lo largo de las líneas de corriente, pero el asta rompe el flujo en un patrón irregular parecido al de la figura 22, que da origen al movimiento de aleteo transversal de la bandera. Éstos son ejemplos de un flujo *turbulento* del fluido. Otros ejemplos incluyen las estelas dejadas en el agua por el movimiento de los buques y en el aire por el movimiento de los automóviles y de los aeroplanos. Los sonidos producidos por el silbido y por los instrumentos de viento son consecuencia del flujo turbulento del aire.

En un fluido viscoso, el flujo a baja velocidad puede describirse como estacionario, lo cual sugiere que las capas se deslizan suavemente una sobre otra. Cuando la velocidad del flujo es suficientemente grande, el movimiento se vuelve desordenado e irregular; esto es el flujo turbulento. Una analogía de la mecánica es un bloque empujado a lo largo de una superficie

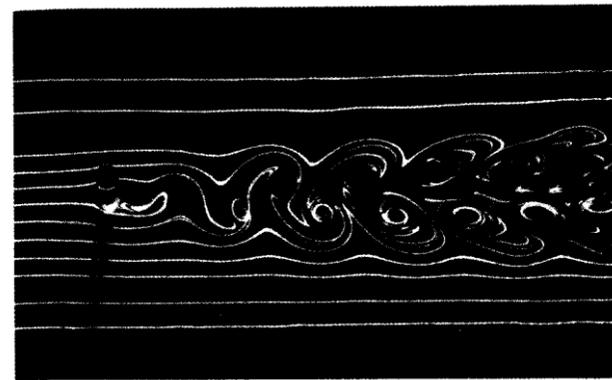


Figura 22 El fluido que corre de izquierda a derecha luego de pasar un obstáculo cilíndrico claramente sufre un cambio de estacionario a turbulento. Nótese los remolinos y torbellinos que se forman corriente abajo a partir del obstáculo.

rugosa. Si la fuerza de fricción es pequeña, el bloque se deslizará por la superficie si la fuerza aplicada F es por lo menos tan grande como la fuerza de fricción f . Si la fuerza de fricción fuese mayor, la fuerza aplicada F deberá también ser mayor, llegando a ser al final lo suficientemente grande como para volcar el bloque. La volcadura del bloque es la analogía de la transición del flujo estacionario al flujo turbulento.

Podemos determinar la velocidad crítica a la cual el flujo se convierte en turbulento por medio de un análisis dimensional. Hagamos que v_c represente la velocidad crítica, la cual consideramos que sea un promedio en el tubo porque, como lo sugiere la figura 20, la velocidad varía en la sección transversal del tubo. Esperamos que esta velocidad crítica dependa de la viscosidad η y de la densidad ρ del fluido y del diámetro D del tubo. Usando nuestra técnica usual de análisis dimensional, procedemos como sigue:

$$v_c \propto \eta^a \rho^b D^c$$

$$[v_c] = [\eta^a][\rho^b][D^c]$$

$$\text{LT}^{-1} = (\text{ML}^{-1}\text{T}^{-1})^a (\text{ML}^{-3})^b (\text{L})^c,$$

donde las dimensiones de la viscosidad han sido obtenidas a partir de sus unidades de $\text{N}\cdot\text{s/m}^2$. Resolviendo, obtenemos

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = -1.$$

Entonces, la velocidad crítica puede escribirse:

$$v_c \propto \frac{\eta}{\rho D},$$

o, introduciendo una constante de proporcionalidad R ,

$$v_c = R \frac{\eta}{\rho D}. \quad (21)$$

La constante sin dimensión R se denomina *número de Reynolds*. Resolviendo la ecuación 21 para R , podemos escribir el número de Reynolds para *cualquier* velocidad del flujo v como:

$$R = \frac{\rho D v}{\eta}. \quad (22)$$

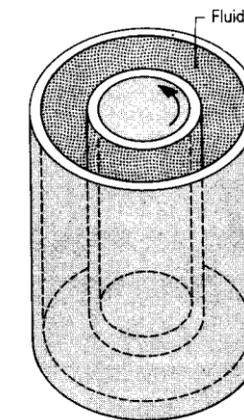


Figura 23 Aparato experimental para medir la viscosidad de los fluidos. El fluido se coloca entre los dos cilindros, estando fijo el cilindro exterior y girando el cilindro interior a una velocidad angular ω . La torca necesaria para hacer girar al cilindro interior a esta velocidad angular está determinada por la viscosidad del fluido.

En esta interpretación, el número de Reynolds puede utilizarse para caracterizar a *cualquier* flujo, y podemos determinar por experimentación el valor del número de Reynolds para el cual el flujo se convierte en turbulento.

En tubos cilíndricos, el número de Reynolds que corresponden a la velocidad crítica es de alrededor de 2000. Así, para el agua que fluya por una tubería de 2 cm de diámetro (la típica manguera de jardín casera, por ejemplo), la velocidad crítica es

$$v_c = 2000 \frac{1 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2}{(10^3 \text{ kg/m}^3)(0.02 \text{ m})} = 0.1 \text{ m/s} = 10 \text{ cm/s}.$$

Ésta es una velocidad bastante baja, lo cual sugiere que el flujo del agua es turbulento en una tubería doméstica ordinaria. (La velocidad de flujo de un grifo doméstico típico es de alrededor de 1 m/s.)

Nótese de la ecuación 21 que la velocidad de flujo crítica aumenta con la viscosidad. Esto es, cuanto más grande sea el rozamiento viscoso ejercido por el fluido circundante, con más probabilidad el flujo será estacionario.

Flujo caótico

La geometría de la figura 19 no es particularmente conveniente para medir la viscosidad. La figura 23 muestra un dispositivo más conveniente. El espacio entre cilindros coaxiales está lleno con el fluido cuya viscosidad está por determinarse. Se hace que el cilindro interior gire, mientras se mantiene fijo al cilindro exterior. Puede determinarse la viscosidad del fluido a partir de la fuerza necesaria para mantener girando al cilindro interior a una velocidad constante.

Para velocidades rotatorias pequeñas, el flujo en la figura 23 será estacionario y laminar. Al aumentar la velocidad rotatoria del cilindro interior, el flujo acaba por ser turbulento. Podemos observar que la transición de flujo estacionario a flujo turbulento se lleva a cabo de manera ordenada. La figura 24 muestra dos etapas intermedias. Primeramente el fluido forma torbellinos toroidales (un poco similar a un montón de donas apiladas) y

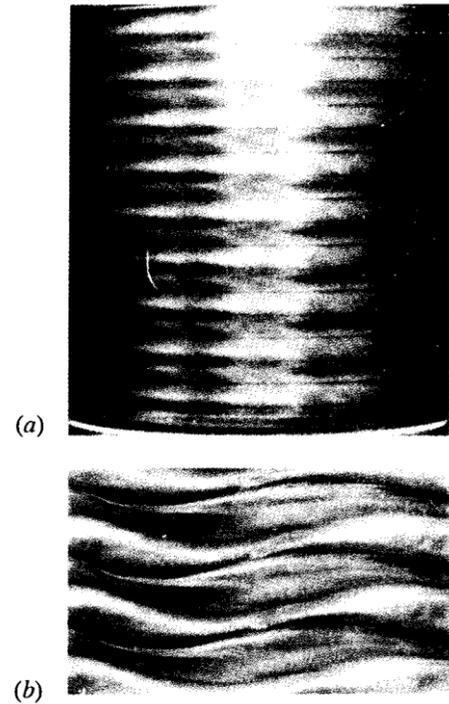


Figura 24 Cuando la velocidad del fluido en el aparato de la figura 23 excede a la velocidad crítica, el flujo se vuelve inestable y se rompe en (a) torbellinos toroidales y luego en (b) ondas sobreimpuestas a los torbellinos.

ciendo la velocidad de rotación, aparecen ondas con nuevas frecuencias. Podemos imaginar que el flujo turbulento es la ampliación de este movimiento que incluye tantas componentes de frecuencia que parece que el movimiento se vuelve completamente desordenado y confuso (algo así como el ruido electrónico). Puede existir una estructura periódica subyacente, pero es demasiado compleja para seguirla.

La teoría del caos (véase la Secc. 6-9) adquiere un enfoque diferente para explicar el surgimiento de la turbulencia. El movimiento turbulento que resulta de la teoría del caos es verdaderamente *aperiódico*, no simplemente la combinación de un gran número de movimientos periódicos. Existe una distinción crítica entre estos dos casos. Si la transición de flujo estacionario a flujo turbulento tiene lugar por medio de una sucesión de movimientos periódicos ordenados, entonces dos partículas de fluido que se muevan en forma parecida en el flujo estacionario permanecerán en estados de movimiento relacionados íntimamente durante la transición al flujo turbulento. Sin embargo, si la condición intermedia puede describirse como caótica, entonces el movimiento deja de ser susceptible de predicción y las dos partículas pueden hallarse en el flujo turbulento en estados de movimiento muy diferentes. La teoría del caos, aplicable a una amplia variedad de sistemas físicos, proporciona una base teórica alterna para entender sistemas complejos como el movimiento turbulento de los fluidos. ■

luego se manifiesta con un patrón de ondas de frecuencia definida que se superpone a los torbellinos. Al continuar cre-

PREGUNTAS

1. Describa brevemente lo que significa cada uno de los conceptos siguientes e ilústrellos con un ejemplo: (a) flujo de fluido estacionario; (b) flujo de fluido no estacionario; (c) flujo de fluido rotatorio; (d) flujo de fluido no rotatorio; (e) flujo de fluido compresible; (f) flujo de fluido incompresible; (g) flujo de fluido viscoso; (h) flujo de fluido no viscoso.
2. Explique las variaciones de presión de la sangre al circular por el organismo.
3. Explique cómo mide un médico la presión sanguínea.
4. En el flujo estacionario, el vector de la velocidad es constante en cualquier punto. ¿Puede existir entonces un movimiento acelerado de las partículas del fluido? Explique.
5. Describa las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido al correr por una tubería de sección transversal no uniforme.
6. En una demostración en el aula, una pelota de ping pong se mantiene en el aire por medio de un chorro vertical de aire. ¿Es el equilibrio estable, inestable, o neutro? Explique.
7. La altura del líquido en los tubos derechos de la figura 25 indica que la presión disminuye a lo largo del conducto,

aun cuando éste tenga una sección transversal uniforme y el líquido que fluye sea incompresible. Explique.

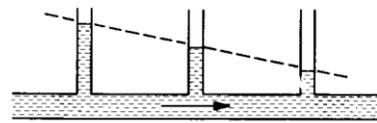


Figura 25 Pregunta 7.

8. Explique por qué una chimenea más alta crea un mejor tiro para extraer el humo fuera del hogar. ¿Por qué no se extiende el humo en el recinto en que se halla el fuego?
9. (a) Explique cómo puede hacer un lanzador de béisbol que la bola se curve a su derecha o a su izquierda. ¿Podemos justificarlo aplicando la ecuación de Bernoulli a una bola que gire así? (Véase "Bernoulli and Newton in Fluid Mechanics", por Norman F. Smith, *The Physics Teacher*, noviembre de 1972, pág. 451.) (b) ¿Por qué es más fácil

lograr una curva con una pelota de tenis que con una bola de béisbol?

10. No solamente puede hacerse que una bola de superficie rugosa se curve al lanzarla sino también una bola lisa, pero estas bolas se curvarán en direcciones *opuestas*. ¿Por qué? (Véase "Effect of Spin and Speed on the Curve of a Baseball and the Magnus Effect for Smooth Spheres", por Lyman J. Briggs, *American Journal of Physics*, noviembre de 1959, pág. 589.)
11. Dos lanchas de remos que se mueven paralelamente entre sí y en la misma dirección son arrastradas una hacia la otra. Dos automóviles que se muevan paralelamente también son arrastrados entre sí. Explique tal fenómeno con base en la ecuación de Bernoulli.
12. Al construir los "rascacielos", ¿qué fuerzas producidas por el movimiento del aire deben ser contrarrestadas? ¿Cómo se hace esto? (Véase "The Wind Bracing of Buildings", por Carl W. Condit, *Scientific American*, febrero de 1974, pág. 92.)
13. Explique, mediante la ecuación de Bernoulli, la acción de un paracaídas para retardar la caída libre.
14. ¿Por qué se vuelve más angosta la corriente de agua al salir por un grifo?
15. ¿Puede usted explicar por qué el agua fluye en corriente continua cuando corre por un tubo vertical hacia abajo, mientras que se divide en gotas al caer libremente?
16. ¿Cómo trabaja la descarga de un excusado? En la realidad. (Véase *Flushed with Pride: The Story of Thomas Crapper*, por W. Reyburn, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1969.)
17. A veces, es posible sacar una carta del sobre cortando una tira delgada del lado estrecho, sujetándolo firmemente, y soplando hacia él. Explique, empleando la ecuación de Bernoulli, por qué tiene éxito este procedimiento.
18. ¿Sería mejor que un aeroplano al despegar se moviese contra el viento o con el viento? ¿Y al aterrizar?
19. Explique cómo depende la diferencia de presión entre las superficies baja y alta del ala de un aeroplano de la altitud del plano que se mueve.
20. La acumulación de hielo en el ala de un aeroplano puede reducir significativamente su fuerza ascensional. Explique. (El peso del hielo no es lo que aquí importa.)
21. ¿Cómo es que un aeroplano puede volar "panza" arriba?
22. "La forma de plátano característica de la mayoría de los bumerangs no tiene mucho que ver con su capacidad de retorno... La cuestión esencial consiste en la sección transversal de los brazos, la cual debe ser más convexa en un lado que en el otro, como en el perfil del ala de un aeroplano. (De "The Aerodynamics of Boomerangs", por Felix Hess, *Scientific American*, noviembre de 1968, pág. 124.) Explique.
23. ¿Cómo se impulsan los pájaros para remontar el vuelo? (Véase "The Soaring Flight of Birds", por C. D. Cone, Jr., *Scientific American*, abril de 1962, pág. 130.)
24. ¿Por qué aparece el factor "2" en lugar del factor "1"? Uno podría ingenuamente esperar que el empuje fuera simplemente la diferencia de presión multiplicada por el área, esto es, $A_0(p - p_0)$.

25. Explique por qué el efecto destructivo de un tornado es mayor cerca del centro de la perturbación que cerca del borde.
26. Cuando se retira el tapón de una tina llena, el agua se cuela por el orificio mientras forma un pequeño remolino. La velocidad angular de un elemento de fluido en torno a un eje vertical que pase por el orificio parece ser más grande cerca del orificio. Explique.
27. ¿Es verdad que en las bañeras situadas en el hemisferio norte el agua se drena con una rotación en sentido antihorario y en las del hemisferio sur lo hacen en sentido horario? De ser así, explique y prediga lo que pasaría en el ecuador. (Véase "Bath-Tub Vortex", por Ascher H. Shapiro, *Nature*, diciembre 15, 1962, pág. 1080.)
28. Explique por qué no es posible retirar el filtro de papel del embudo de la figura 26 soplando por el extremo angosto.

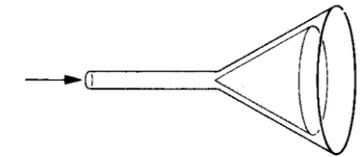


Figura 26 Pregunta 28.

29. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, un aumento de velocidad debe estar asociado a una disminución de la presión. Sin embargo, cuando ponemos la mano fuera de la ventanilla de un automóvil en movimiento, aumentando la velocidad a la cual fluye el aire, sentimos un *aumento* de presión. ¿Por qué no es esto una violación de la ecuación de Bernoulli?
30. ¿Por qué la presencia de la atmósfera reduce el alcance máximo de ciertos objetos (por ejemplo, las pelotas de tenis) pero aumenta el alcance máximo de otros (por ejemplo, los discos voladores o las pelotas de golf)?
31. Un disco puede llegar más lejos lanzado *contra* un viento de 25 mi/h que a favor del viento. ¿Cuál es la explicación? (Sugerencia: Piense en la fuerza ascensional dinámica y en el arrastre.)
32. Explique por qué las pelotas de golf tienen hoyuelos.
33. Cuanto más largo sea el tablón y haya menos profundidad en el agua, más lejos se deslizará una tabla para flotar sobre las olas (*surf board*). Explique. (Véase "The Surf Skimmer", por R. D. Edge, *American Journal of Physics*, Julio de 1968, pág. 630.)
34. Si se vierte de una tetera, el agua tiene una tendencia a salir a lo largo del borde inferior de la boca de salida. Explique. (Véase "The Teapot Effect... a Problem", por Markus Reiner, *Physics Today*, septiembre de 1956, pág. 16.)
35. Las marmotas viven en colonias grandes en sistemas complejos de madrigueras interconectadas. Encaran el problema de mantener en sus madrigueras un abastecimiento de aire suficiente para evitar la asfixia. La evitan construyendo montículos cónicos de tierra sobre algunas de sus muchas aberturas de madriguera. En términos de la ecuación de Bernoulli, ¿cómo trabaja este esquema de aire

acondicionado? Obsérvese que, debido a las fuerzas viscosas, la velocidad del viento en la pradera está menos cerca del nivel del suelo de lo que lo está incluso a unas cuantas pulgadas más arriba. (Véase *New Scientist*, enero 27, 1972, pág. 191.)

36. La viscosidad es un ejemplo de un fenómeno de transporte. ¿Qué propiedad está siendo transportada? ¿Puede usted pensar en otros fenómenos de transporte y en sus propiedades correspondientes?

37. En tiempo de frío, ¿por qué recomiendan los fabricantes de automóviles emplear aceites "multigrado" (multiviscosidad) para el motor?
38. ¿Por qué es más importante tener en cuenta la viscosidad en un fluido que circula por un conducto angosto que en un conducto relativamente sin restricción?
39. La viscosidad puede retrasar la presencia de turbulencia en el flujo de los fluidos; es decir, tiende a estabilizar el flujo. Considere el jarabe y el agua, por ejemplo, y encuentre una explicación aceptable.

PROBLEMAS

Sección 18-2 Trayectoria de una corriente y la ecuación de continuidad

- Un tubo de 34.5 cm de diámetro conduce agua que circula a razón de 2.62 m/s. ¿Cuánto tiempo le tomará descargar 1600 m³ de agua?
- Una manguera de jardín que tiene un diámetro interno de 0.75 in está conectada a un aspersor que consta simplemente de un accesorio con 24 orificios, cada uno de 0.050 in de diámetro. Si el agua de la manguera tiene una velocidad de 3.5 ft/s, ¿a qué velocidad sale por los orificios del aspersor?
- La figura 27 muestra la confluencia de dos corrientes que forman un río. Una corriente tiene una anchura de 8.2 m, una profundidad de 3.4 m, y una velocidad de 2.3 m/s. La otra corriente tiene 6.8 m de anchura, 3.2 m de profundidad, y fluye a razón de 2.6 m/s. La anchura del río es de 10.7 m y la velocidad de su corriente es de 2.9 m/s. ¿Cuál es su profundidad?

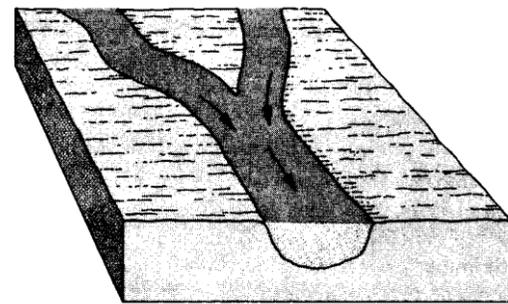


Figura 27 Problema 3.

- Se bombea continuamente agua que se extrae de un sótano inundado con una velocidad de 5.30 m/s por medio de una manguera uniforme de 9.70 mm de radio. La manguera pasa por una ventana situada a 2.90 m sobre el nivel del agua. ¿Cuánta potencia proporciona la bomba?
- Un río de 21 m de anchura y 4.3 m de profundidad irriga una superficie de 8500 km² donde la precipitación (plu-

vial) promedio es de 48 cm/año. Una cuarta parte de ésta regresa posteriormente a la atmósfera por evaporación, pero el resto corre finalmente por el río. ¿Cuál es la velocidad promedio de la corriente del río?

- Las corrientes de las mareas en los canales angostos que unen a las bahías costeras con el océano pueden ser muy rápidas. El agua debe fluir hacia la bahía al elevarse la marea y salir de nuevo al mar durante la bajamar. Considere la bahía rectangular mostrada en la figura 28a. La bahía está unida al mar por medio de un canal de 190 m de anchura y 6.5 m de profundidad respecto al nivel medio del mar. La gráfica (figura 28b) muestra la variación diurna del nivel del agua en la bahía. Calcule la velocidad promedio de la corriente de las mareas en el canal.

Sección 18-3 La ecuación de Bernoulli

- ¿Cuánto trabajo efectúa la presión al bombear 1.4 m³ de agua por un tubo de 13 mm de diámetro interno si la diferencia de presión entre los extremos del tubo es de 1.2 atm?
- La toma de agua de una presa (véase la Fig. 29) tiene un área de sección transversal de 7.60 ft². El agua fluye en ella a una velocidad de 1.33 ft/s. En la planta de generación que está situada a 572 ft abajo del punto de toma, el agua fluye a razón de 31 ft/s. (a) Halle la diferencia de presión, en lb/in², entre la toma y la descarga. (b) Halle el área del tubo de descarga. La densidad promedio del agua es de 62.4 lb/ft³.
- A veces, se prueban modelos de torpedos en un tubo horizontal por el que fluye el agua, muy similar al túnel de viento que se emplea para probar modelos de aviones. Considere un tubo circular de 25.5 cm de diámetro interno y un modelo de torpedo, alineado a lo largo del eje del tubo, con un diámetro de 4.80 cm. El torpedo va a ser probado con agua que circula a razón de 2.76 m/s. (a) ¿A qué velocidad deberá fluir el agua en la parte no reducida del tubo? (b) Halle la diferencia de presión entre la parte no reducida y la parte reducida del tubo.
- Por una tubería con un área de la sección transversal de 4.20 cm² circula el agua a una velocidad de 5.18 m/s. El agua desciende gradualmente 9.66 m mientras que el área

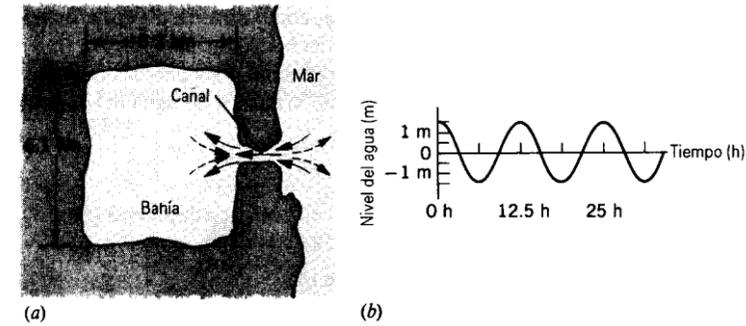


Figura 28 Problema 6.

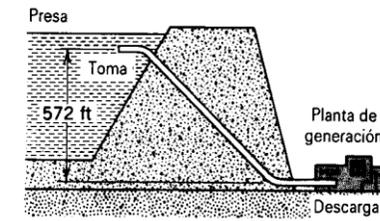


Figura 29 Problema 8.

del tubo aumenta en 7.60 cm². (a) ¿Cuál es la velocidad del flujo en el nivel inferior? (b) La presión en el nivel superior es de 152 kPa; halle la presión en el nivel inferior.

- Supóngase que dos tanques, 1 y 2, cada uno con una gran abertura en la parte superior, contienen líquidos diferentes. Se practica un pequeño orificio en el costado de cada tanque a la misma profundidad h debajo de la superficie del líquido, pero el orificio del tanque 1 tiene la mitad del área de sección transversal que tiene el orificio del tanque 2. (a) ¿Cuál es la razón ρ_1/ρ_2 de las densidades de los fluidos si se observa que el flujo de masa es el mismo a través de los dos orificios? (b) ¿Cuál es la razón de los flujos volumétricos de los dos tanques? (c) Se desea igualar los dos flujos añadiendo o drenando fluido en el tanque 2. ¿Cuál sería la nueva altura del fluido sobre el orificio del tanque 2 para hacer que la cantidad de flujo en el tanque 2 sea igual a la del tanque 1?
- Durante un huracán está soplando aire (densidad = 1.2 kg/m³) sobre el tejado de una casa a una velocidad de 110 km/h. (a) ¿Cuál es la diferencia de presión entre el interior y el exterior que tiende a levantar el tejado? (b) ¿Cuál sería la fuerza ascensional en un tejado de 93 m² de área?
- Las ventanas de un edificio de oficinas tienen 4.26 m por 5.26 m. En un día tempestuoso, el aire sopla a razón de 28.0 m/s al pasar por una ventana en el piso 53. Calcúlese la fuerza neta sobre la ventana. La densidad del aire es de 1.23 kg/m³.
- Un líquido fluye por una tubería horizontal cuyo radio interior es de 2.52 cm. La tubería se dobla hacia arriba hasta una altura de 11.5 m donde se ensancha y se une con otra tubería horizontal de 6.14 cm de radio interior. ¿Cuál debe ser el flujo volumétrico si la presión en las dos tuberías horizontales es la misma?

- La figura 30 muestra un líquido que está siendo descargado por un orificio practicado en un tanque grande y situado a una distancia h bajo la superficie del líquido. El tanque está abierto por arriba. (a) Aplique la ecuación de Bernoulli a una línea de corriente líquida que una a los puntos 1, 2, y 3, y demuestre que la velocidad de salida es

$$v = \sqrt{2gh}$$

Esta ecuación se conoce como la *ley de Torricelli*. (b) Si el orificio estuviese curvado directamente hacia arriba, ¿a qué altura se elevaría la línea de corriente líquida? (c) ¿Cómo afectaría al análisis la viscosidad o la turbulencia?

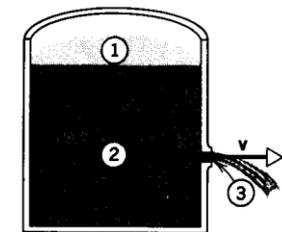


Figura 30 Problema 15.

- Un tanque está lleno de agua hasta una altura H . En una de sus paredes se taladra un orificio a una profundidad h bajo la superficie del agua (Fig. 31). (a) Demuestre que la distancia x desde la base de la pared hasta donde cae la corriente al suelo está dada por $x = 2\sqrt{h(H-h)}$. (b) Podría taladrarse un orificio a otra profundidad de modo que esta segunda corriente tuviese el mismo alcance? De ser así, a qué profundidad? (c) ¿A qué profundidad debería estar el orificio para hacer que la corriente de salida caiga al suelo a la distancia máxima a partir de la base del tanque? ¿Cuál es esta distancia máxima?
- Un francotirador dispara una bala de rifle contra un tanque de gasolina, haciéndole un orificio a 53.0 m bajo la superficie de la gasolina. El tanque se ha sellado y se ha sometido a una presión absoluta de 3.10 atm, como se muestra en la figura 32. La gasolina almacenada tiene una densidad de 660 kg/m³. ¿A qué velocidad comienza la gasolina a salir disparada por el orificio?
- Considérese un tubo en U uniforme con un diafragma en el fondo y lleno de un líquido a alturas diferentes en cada

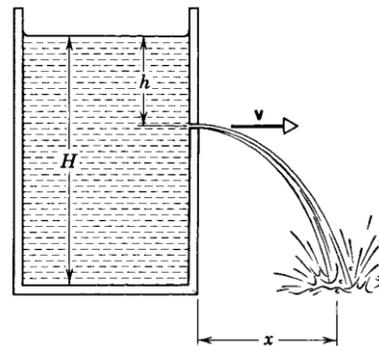


Figura 31 Problema 16.

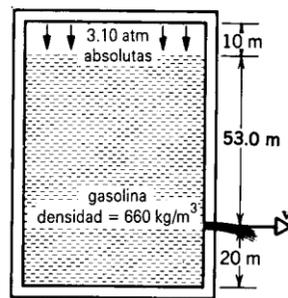


Figura 32 Problema 17.

brazo (véase la Fig. 33). Imaginemos ahora que el diafragma se perfora de modo que el líquido fluye de izquierda a derecha. (a) Demuestre que la aplicación de la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 3 conduce a una contradicción. (b) Explique por qué la ecuación de Bernoulli no es aplicable aquí. (Sugerencia: ¿Es estacionario el flujo?)

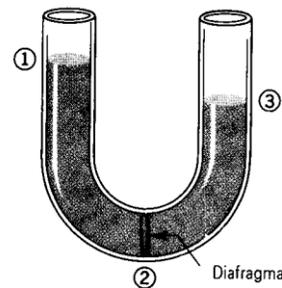


Figura 33 Problema 18.

19. Si una persona sopla aire a una velocidad de 15.0 m/s en la parte superior de un lado de un tubo en U que contiene agua, ¿cuál será la diferencia entre los niveles del agua en los dos lados? Suponga que la densidad del aire sea de 1.20 kg/m³.
20. El agua dulce embolsada tras la cortina de una presa tiene una profundidad de 15.2 m. Un tubo horizontal de 4.30 cm de diámetro pasa a través de la cortina a 6.15 m

bajo la superficie del agua, como se muestra en la figura 34. En la salida del tubo se ha colocado un tapón. (a) Halle la fuerza de fricción entre el tapón y las paredes del tubo. (b) Se retira el tapón. ¿Qué volumen de agua sale por el tubo en 3.00 h?

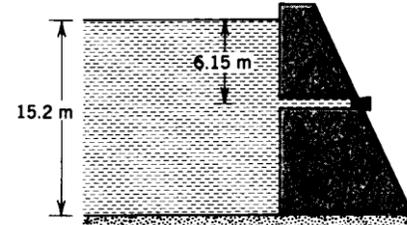


Figura 34 Problema 20.

21. Un sifón es un aparato para extraer líquido de un recipiente sin inclinarlo. Funciona como se muestra en la figura 35. El tubo debe estar lleno inicialmente, pero una vez se ha hecho esto, el líquido fluirá hasta que el nivel descienda por debajo de la abertura del tubo en A. El líquido tiene una densidad ρ y una viscosidad despreciable. (a) ¿A qué velocidad sale el líquido del tubo en C? (b) ¿Cuál es la presión del líquido en el punto más elevado B? (c) ¿Cuál es la mayor altura h posible a la que el sifón puede elevar el agua?

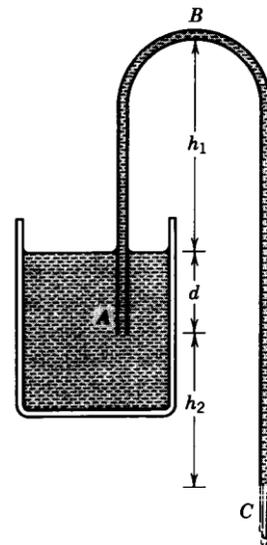


Figura 35 Problema 21.

22. (a) Considérese una corriente de fluido de densidad ρ con velocidad v_1 que pasa *repentinamente* de un tubo cilíndrico de área de sección transversal a_1 a un tubo cilíndrico más ancho de área de sección transversal a_2 (véase la Fig. 36). El chorro se mezclará con el fluido circundante

y, después de mezclarse, fluirá casi uniformemente a una velocidad promedio v_2 . Sin referirse a los detalles del mezclado, use argumentos del ímpetu para demostrar que el aumento de presión debido al mezclado es aproximadamente

$$p_2 - p_1 = \rho v_2(v_1 - v_2).$$

(b) Demuestre a partir de la ecuación de Bernoulli que en un tubo que se vacíe *gradualmente* obtendríamos

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2).$$

(c) Halle la pérdida de presión debida al ensanchamiento repentino del tubo. ¿Puede usted trazar una analogía con las colisiones elásticas e inelásticas de la mecánica de la partícula?

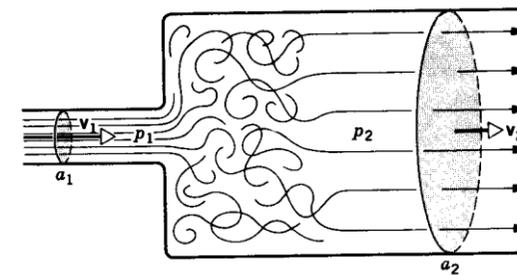


Figura 36 Problema 22.

23. Una jarra contiene 15 vasos de jugo de naranja. Cuando se abre la espita del fondo transcurren 12.0 s para llenar de jugo un vaso. Si dejamos la espita abierta, ¿cuánto tiempo tardarán en llenarse los 14 vasos restantes hasta agotar el jugo?

Sección 18-4 Aplicaciones de la ecuación de Bernoulli y de la ecuación de continuidad

24. Un tubo de Pitot está montado en el ala de un aeroplano para determinar la velocidad del aeroplano con relación al aire, el cual tiene una densidad de 1.03 kg/m³. El tubo contiene alcohol e indica una diferencia de nivel de 26.2 cm. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano respecto al aire? La densidad del alcohol es de 810 kg/m³.
25. Un tubo hueco tiene un disco DD adosado a su extremo (Fig. 37). Cuando se sopla aire de densidad ρ por el tubo, el disco atrae a la tarjeta CC. Sea A el área de la tarjeta y v la velocidad promedio del aire entre la tarjeta y el disco. Calcule la fuerza hacia arriba resultante sobre CC. Desprecie el peso de la tarjeta; suponga que $v_0 \ll v$, donde v_0 es la velocidad del aire en el tubo hueco.
26. Una placa cuadrada de 9.10 cm de lado y 488 g de masa está embisagrada a lo largo de uno de los lados. Si se sopla aire sobre la superficie superior únicamente, ¿qué velocidad debe tener el aire para mantener horizontal a la placa? El aire tiene una densidad de 1.21 kg/m³.
27. Sobre la parte superior del ala, de área A, de un aeroplano fluye el aire a una velocidad v , y pasa por debajo del ala a

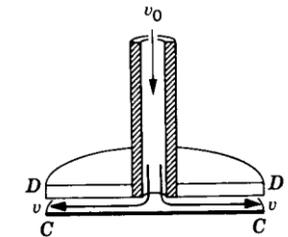


Figura 37 Problema 25.

una velocidad v_0 . Demuestre que la ecuación de Bernoulli predice que la fuerza ascensional L sobre el ala será de

$$L = \frac{1}{2} \rho A (v^2 - v_0^2),$$

en donde ρ es la densidad del aire. (Sugerencia: Aplíquese la ecuación de Bernoulli a la línea de corriente que pasa justo sobre la superficie superior del ala y a la línea de corriente que pasa justo por debajo de la superficie inferior del ala. ¿Puede usted justificar que las constantes de las dos líneas de corriente sean iguales?)

28. Un aeroplano tiene un área de ala (de cada ala) de 12.5 m². A cierta velocidad del aire, éste fluye sobre la superficie superior del ala a razón de 49.8 m/s y sobre la superficie inferior del ala a 38.2 m/s. (a) Halle la masa del aeroplano. Suponga que el aeroplano viaja a velocidad constante y que los efectos de la fuerza ascensional asociados con el fuselaje y el conjunto de la cola son pequeños. Explique la fuerza ascensional si el aeroplano, que vuela a la misma velocidad que el aire está (b) en vuelo nivelado; (c) ascendiendo a 15°, y (d) descendiendo a 15°. La densidad del aire es de 1.17 kg/m³. Véase el problema 27.
29. Considérese el aire estancado en el borde frontal de un ala y el aire que circula sobre la superficie del ala a una velocidad v . Suponga que la presión en el borde de entrada es la atmosférica aproximadamente y halle el mayor valor posible para v del flujo de corriente; suponga también que el aire es incompresible y utilice la ecuación de Bernoulli. Tome como densidad del aire 1.2 kg/m³. ¿Cómo se compara esto con la velocidad del sonido bajo estas condiciones (340 m/s)? ¿Puede usted explicar la diferencia? ¿Por qué habría de existir alguna conexión entre estas cantidades?

30. Un tubo de Venturi tiene un diámetro de 25.4 cm y una garganta de 11.3 cm de diámetro. La presión del agua en el tubo es 57.1 kPa y en la garganta es de 32.6 kPa. Calcule el flujo volumétrico del agua a través del tubo.
31. Considérese el medidor Venturi de la figura 9. Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2, y la ecuación de continuidad (Ec. 3), verifique la ecuación 11 para la velocidad del flujo en el punto 1.
32. Considérese el medidor Venturi de la figura 9, que contiene agua, sin el manómetro. Sea $A = 4.75a$. Suponga que la presión en el punto 1 sea 2.12 atm. (a) Calcule los valores de v en el punto 1 y de v' en el punto 2 que harían que la presión p' en el punto 2 fuese igual a cero. (b)

Calcule la cantidad de flujo volumétrico correspondiente si el diámetro en el punto 1 fuese 5.20 cm. El fenómeno en el punto 2 cuando p' decae a casi cero es conocido como *cavitación*. El agua se evapora en pequeñas burbujas.

Sección 18-5 Campos de flujo

33. Demuestre que la constante en la ecuación de Bernoulli es la misma para *todas* las líneas de corriente en el caso del flujo estacionario, no rotatorio de la figura 14.
34. Un campo de fuerza es conservativo si $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$. El círculo del signo de la integración significa que la integración va a ser considerada a lo largo de una curva cerrada (un viaje redondo) en el campo. Un flujo es un flujo potencial (y por tanto no rotatorio) si $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$ para cada una de las líneas cerradas en el campo. Usando este criterio, demuestre que los campos (a) de la figura 14 y (b) de la figura 17 son campos de flujo potencial.
35. Los efectos centrífugos son considerables en flujos que estén fuertemente curvados. Considérese un elemento de fluido que se mueva a una velocidad v a lo largo de la línea de corriente de un flujo curvo en un plano horizontal (Fig. 38). (a) Demuestre que $dp/dr = \rho v^2/r$, de modo que la presión aumenta en una cantidad $\rho v^2/r$ por unidad de distancia perpendicular a la línea de la corriente yendo del lado cóncavo al lado convexo de ésta. (b) Luego, utilice la ecuación de Bernoulli y este resultado para demostrar que vr es igual a una constante, de modo que las velocidades aumentan hacia el centro de curvatura. De aquí que las líneas de corriente que estén espaciadas uniformemente en una tubería recta se agrupen hacia la pared interior del pasaje curvo y se separen hacia la pared exterior. Este problema debe de compararse con el problema 29 del capítulo 17, donde el movimiento curvo se produce al hacer girar un recipiente. Allí la velocidad variaba directamente con r , pero aquí varía inversamente. (c) Demuestre que este flujo es no rotatorio.

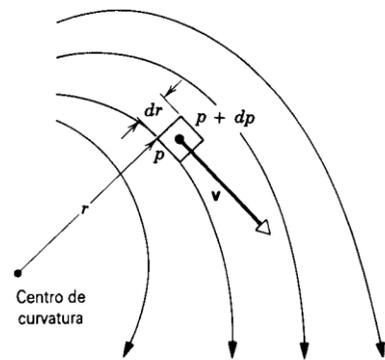


Figura 38 Problema 35.

36. Un modelo del movimiento planetario propuesto por René Descartes fue ampliamente aceptado antes de que Newton propusiera su teoría de la gravitación. En el modelo de Descartes los planetas eran atrapados y arrastrados por un remolino de partículas de éter centrado alrededor del Sol.

Newton demostró que este esquema de torbellino contradecía las observaciones porque: (a) la velocidad de una partícula de éter en el vértice varía inversamente a su distancia al Sol; (b) el periodo de revolución de una partícula tal varía directamente con el cuadrado de su distancia al Sol, y (c) este resultado contradice a la tercera ley de Kepler. Demuestre (a), (b), y (c).

Sección 18-6 Viscosidad, turbulencia, y flujo caótico

37. La figura 39 muestra una sección transversal de las capas superiores de la Tierra. La superficie de la Tierra se divide en varios bloques rígidos, llamados placas, que se deslizan (¡lentamente!) sobre una capa "fangosa" más baja llamada astenosfera. En la figura se relacionan las dimensiones típicas. Supóngase que la velocidad de la placa rígida mostrada sea $v_0 = 48$ mm/año, y que la base de la astenosfera no se mueva. Calcule el esfuerzo cortante en la base de la placa. La viscosidad del material de la astenosfera es de 4.0×10^{19} Pa · s. Ignore la curvatura de la Tierra.

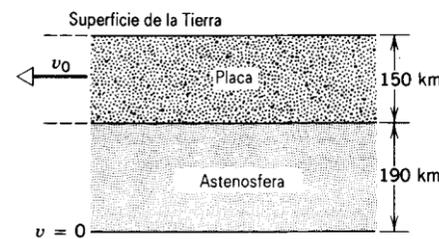


Figura 39 Problema 37.

38. Calcular la mayor velocidad a la cual puede fluir la sangre, a 37° C, por una arteria de 3.8 mm de diámetro si el flujo ha de permanecer estacionario.
39. Por un tubo horizontal de 1.88 cm de radio interno y 1.26 m de longitud fluye mercurio líquido (viscosidad = 1.55×10^{-3} N · s/m²). El flujo volumétrico es de 5.35×10^{-2} L/min. (a) Demuestre que el flujo es estacionario. (b) Calcule la diferencia de presión entre los dos extremos del tubo.
40. En la figura 40 se muestran las líneas de corriente de un campo de flujo de Poiseuille. El espaciamiento de las líneas de corriente indica que aunque el movimiento es rectilíneo, existe un gradiente de velocidad en dirección transversal. Demuestre que el flujo de Poiseuille es rotatorio.

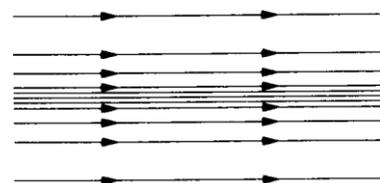


Figura 40 Problema 40.

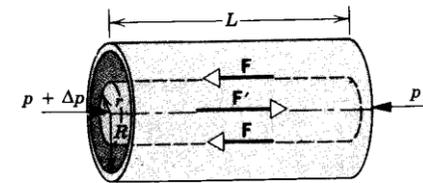


Figura 41 Problemas 41 y 42.

41. Un fluido de viscosidad η fluye estacionariamente por un tubo cilíndrico horizontal de radio R y longitud L , como se muestra en la figura 41. (a) Considere un cilindro arbitrario de fluido de radio r . Demuestre que la fuerza viscosa F debida a la capa circundante es $F = -\eta(2\pi rL)dv/dr$. (b) Demuestre que la fuerza F' que empuja a ese cilindro de fluido a lo largo del tubo es $F' = (\pi r^2)\Delta p$. (c) Utilice la condición de equilibrio para obtener una

(c) Utilice la condición de equilibrio para obtener una expresión para dv en términos de dr . Integre la expresión para obtener la ecuación 18.

42. Considere una vez más el fluido que corre por el tubo descrito en el problema 41 e ilustrado en la figura 41. Halle una expresión para el flujo de masa por un anillo anular entre los radios r y $r + dr$; luego integre este resultado para hallar el flujo de masa total por el tubo, verificando por lo tanto la ecuación 20.
43. Se sopla una burbuja de jabón de 38.2 mm de radio por el extremo de un tubo angosto de 11.2 cm de longitud y 1.08 mm de diámetro interno. El otro extremo del tubo se halla expuesto a la atmósfera. Halle el tiempo que tarda el radio de la burbuja en descender a 21.6 mm. Suponga un flujo de Poiseuille en el tubo. (Use 2.50×10^{-2} N/m para la tensión superficial de la solución de jabón; la viscosidad del aire es de 1.80×10^{-3} N · s/m².)

CAPÍTULO 19

MOVIMIENTO ONDULATORIO

El movimiento ondulatorio se manifiesta en casi todas las ramas de la física. En los cuerpos acuáticos se pueden observar, comúnmente, ondas superficiales. Las ondas sonoras y las ondas luminosas son esenciales para nuestra percepción del entorno, a causa de que hemos desarrollado receptores (los ojos y los oídos) capaces de detectarlas. En el siglo pasado el ser humano aprendió a producir y utilizar las ondas de radio. Podemos también entender la estructura de los átomos y de los sistemas subatómicos basados en las propiedades ondulatorias de las partículas que los constituyen. La similitud de las descripciones físicas y matemáticas de estas distintas clases de ondas indican que el movimiento ondulatorio es uno de los temas unificadores de la física.

En este capítulo y en el siguiente desarrollaremos las descripciones tanto verbales como matemáticas de las ondas. Utilizamos el ejemplo de las ondas mecánicas, en parte porque ya hemos desarrollado las leyes de la mecánica en este texto. Más adelante, desarrollaremos las leyes que rigen para otros tipos de ondas (por ejemplo, las ondas de luz y otras ondas electromagnéticas). A efectos de simplificación, nos concentraremos en el estudio de las ondas armónicas (es decir, aquellas que pueden ser representadas por funciones del seno y del coseno), pero los principios que desarrollamos se aplican igualmente a formas ondulatorias más complejas.

19-1 ONDAS MECÁNICAS

Las ondas marinas viajan miles de millas a través del océano, pero las partículas de agua no llevan a cabo ese viaje. Cuando usted le grita a un amigo, la onda de sonido recorre la sala, pero las moléculas de aire no recorren esa distancia. Estamos familiarizados con el hecho de que la energía y el ímpetu se transportan de un lugar a otro en virtud del movimiento de las partículas; el movimiento ondulatorio proporciona una manera alternativa de que la energía y el ímpetu se muevan de un lugar a otro sin que las partículas materiales hagan ese viaje.

Las ondas de agua y las ondas sonoras son ejemplos de *ondas mecánicas* que viajan a través de un medio deformable o elástico. Se originan cuando cierta parte del medio se desplaza de su posición normal y queda liberada. Debido a las propiedades elásticas del medio, la perturbación se propaga a través de éste. A nivel microscópico, propiedades mecánicas tales como las fuerzas entre los átomos son las causantes de la propagación de las ondas mecánicas.

En este capítulo nos concentraremos en el estudio de las ondas mecánicas. Para ilustrar algunas propiedades generales de las ondas hemos elegido como ejemplo a un tipo sencillo de onda mecánica, que implica la oscilación de una cuerda estirada como las que se utilizan en una guitarra.

Cuando una onda alcanza a una partícula situada en el medio pone a esa partícula en movimiento y la desplaza, transfiriéndole así energía tanto cinética como potencial. Mediante el movimiento ondulatorio, puede transmitirse a grandes distancias no solamente energía, sino además información sobre la naturaleza de la fuente de ondas. Podemos decir que las partículas del medio se mueven, al pasar la onda, únicamente distancias pequeñas con respecto a sus posiciones previas, sin experimentar un desplazamiento neto en la dirección del viaje de la onda. Por ejemplo, los objetos flotantes pequeños, como una hoja o un corcho muestran que el movimiento real del agua al pasar de la onda es más bien hacia arriba y hacia abajo, y quizás ligeramente en vaivén; una vez que pasa la onda, el objeto está más o menos en el mismo lugar en que estaba

antes de haber pasado ésta. Este hecho era ya conocido en el siglo XV por Leonardo da Vinci, quien escribió de las ondas de agua: "A menudo sucede que la onda escapa del sitio de su creación, mientras que el agua no; como las ondas que se forman en un campo de trigo por efecto del viento, donde las vemos correr a través del campo mientras las espigas permanecen en su lugar."

19-2 TIPOS DE ONDAS

Al enumerar a las ondas de agua, de luz, y de sonido como ejemplo de movimiento ondulatorio, estamos clasificando a las ondas de acuerdo a sus propiedades físicas más amplias. Las ondas pueden clasificarse también de otras maneras.

Podemos distinguir diferentes clases de ondas mecánicas si consideramos cómo se relacionan la dirección del movimiento de las partículas de materia con la dirección de propagación de la onda. Si el movimiento de las partículas es perpendicular a la dirección de propagación de la onda misma, hablamos de una onda *transversal*. Por ejemplo, cuando una cuerda en tensión se hace oscilar en vaivén desde un extremo, a lo largo de la cuerda viaja una onda transversal; la perturbación se mueve a lo largo de la cuerda pero las partículas de la cuerda vibran en ángulo recto a la dirección de propagación de la perturbación (Fig. 1a). Las ondas de luz, aunque no sean ondas mecánicas, son también ondas transversales.

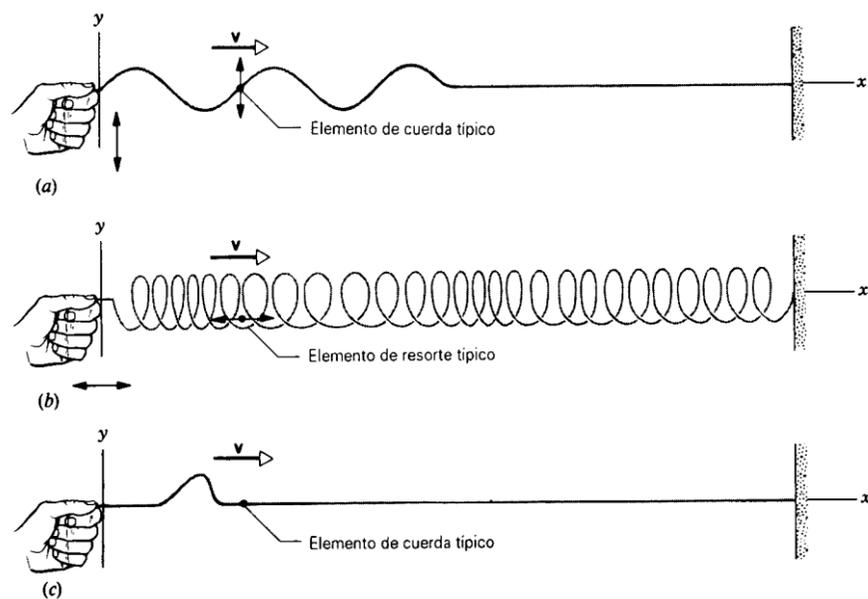


Figura 1 (a) Envío de una onda transversal a lo largo de una cuerda. Cada elemento de la cuerda vibra en ángulo recto a la dirección de propagación de la onda. (b) Envío de una onda longitudinal a lo largo de un resorte. Cada elemento del resorte vibra paralelo a la dirección de propagación de la onda. (c) Envío de una pulsación transversal única a lo largo de una cuerda.

Sin embargo, si el movimiento de las partículas de una onda mecánica es de vaivén a lo largo de la dirección de propagación, tenemos una onda *longitudinal*. Por ejemplo: cuando un resorte en tensión se pone a oscilar en vaivén desde uno de sus extremos, a lo largo del resorte viaja una onda longitudinal; los arrollamientos vibran en vaivén paralelos a la dirección en la que viaja la perturbación a lo largo del resorte (Fig. 1b). Las ondas de sonido que viajan en un gas son ondas longitudinales y las estudiaremos con mayor detalle en el capítulo 20.

Ciertas ondas no son ni puramente longitudinales ni puramente transversales. Por ejemplo, en las ondas que vemos sobre la superficie del agua las partículas de ésta se mueven tanto de arriba abajo como en vaivén, trazando trayectorias elípticas al moverse.

Las ondas pueden también clasificarse como uni, bi, o tridimensionales, de acuerdo con el número de dimensiones en que propaguen la energía. Las ondas que se mueven a lo largo de la cuerda o del resorte de la figura 1 son unidimensionales. Las ondas superficiales o rizados de agua, que se forman al arrojar una piedra a un estanque tranquilo, son bidimensionales. Las ondas de sonido y de luz que viajen radialmente partiendo de una pequeña fuente son tridimensionales.

Puede ampliarse la clasificación de las ondas según como se muevan las partículas del medio en el tiempo. Por ejemplo, podemos producir una *pulsación* que viaje por una cuerda estirada aplicándole un solo movimiento lateral en su extremo (Fig. 1c). Cada partícula permanece

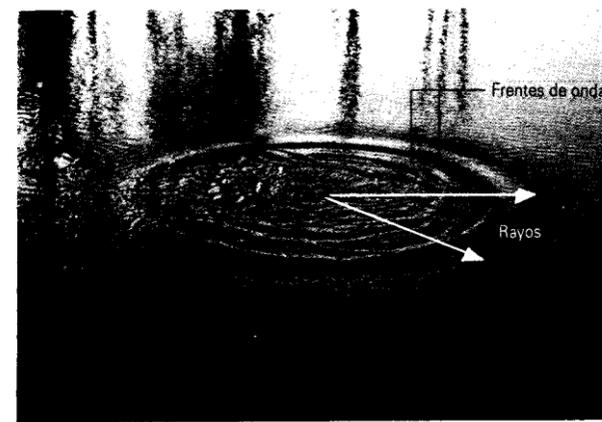


Figura 2 Ondas en la superficie de un lago. Los rizados circulares representan frentes de onda. Los rayos, que son perpendiculares a los frentes de onda, indican la dirección del movimiento de la onda.

Los frentes de onda pueden tener muchas formas. Una fuente central en la superficie del agua produce ondas bidimensionales con frentes de onda circulares y rayos que salen hacia afuera a partir del punto de la perturbación (como en la figura 2). En cambio, un palo muy largo arrojado horizontalmente al agua produciría (cerca de su centro) perturbaciones que viajan como líneas rectas, y cuyos rayos sería líneas paralelas. La analogía tridimensional, en la cual las perturbaciones viajan en una sola dirección, es la *onda plana*. En un instante dado, las condiciones son las mismas en todas partes de cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. Los frentes de onda son planos, y los rayos son líneas rectas paralelas (Fig. 3a). La analogía tridimensional de las ondas circulares son las ondas esféricas. Aquí, la perturbación se propaga hacia afuera en todas direcciones desde una fuente puntual de ondas. Los frentes de onda son esferas, y los rayos son líneas radiales que salen de la fuente puntual en todas direcciones (Fig. 3b). Lejos de esta fuente los frentes de onda esféricos tienen una curvatura muy pequeña, y dentro de una región limitada pueden considerarse a menudo como planos. Por supuesto, existen otras muchas formas de frentes de onda posibles.

19-3 ONDAS VIAJERAS

Como ejemplo del comportamiento de las ondas mecánicas consideraremos a una forma de onda transversal que viaje en una cuerda estirada larga. Suponemos una cuerda "ideal", en la cual la perturbación, ya sea una pulsación o un tren de ondas, mantiene su forma mientras viaja. Para que esto suceda, las pérdidas por fricción y otros medios de disipación de la energía deben ser despreciablemente pequeños. La perturbación está en el plano *xy* y viaja en dirección *x*.

La figura 4a muestra una forma de onda arbitraria en $t = 0$; podemos considerar que ésta es una instantánea de la pulsación que viaja a lo largo de la cuerda mostrada

en reposo hasta que la pulsación llega hasta ella, luego se mueve durante un tiempo corto y luego permanece nuevamente en reposo. Si continuamos moviendo el extremo de la cuerda en vaivén (Fig. 1a), produciremos un *tren de ondas* que viajará a lo largo de la cuerda. Si nuestro movimiento es periódico, produciremos un *tren de ondas periódico*, donde cada partícula de la cuerda tendrá un movimiento periódico. El caso especial más sencillo de una onda periódica es una *onda armónica*, donde cada partícula experimenta un movimiento armónico simple.

Imaginemos una piedra lanzada a un lago tranquilo. Los rizados circulares se esparcen hacia afuera desde el punto en que la piedra entró al agua (Fig. 2). A lo largo de un rizo circular dado, todos los puntos están en el mismo estado de movimiento. Esos puntos definen una superficie llamada *frente de onda*. Si el medio es de densidad uniforme, la dirección del movimiento de las ondas está en ángulo recto al frente de la onda. Una línea normal a los frentes de onda, que indique la dirección del movimiento de las ondas, se llama *rayo*.

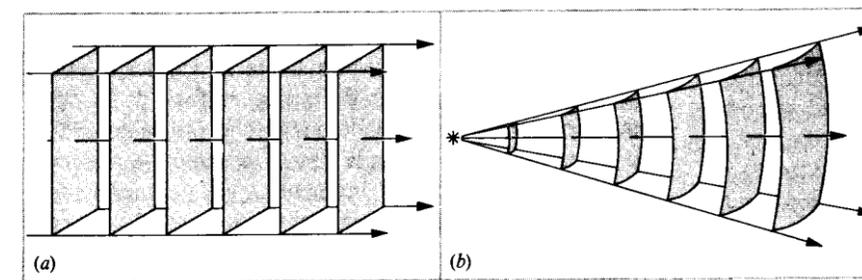


Figura 3 (a) Onda plana. Los planos representan frentes de onda espaciados en una longitud de onda, y las flechas representan rayos. (b) Onda esférica. Los frentes de onda, espaciados en una longitud de onda, son superficies esféricas y los rayos están en dirección radial.

en la figura 1c. Hagamos que la pulsación se mueva en dirección x positiva con una velocidad v . En un tiempo t más tarde, la pulsación se ha movido una distancia vt , como se muestra en la figura 4b. Nótese que la forma de onda es la misma en $t = 0$ que en tiempos posteriores.

La coordenada y indica el desplazamiento transversal de un punto en particular de la cuerda. Esta coordenada depende tanto de la posición x como del tiempo t . Indicamos esta dependencia de dos variables como $y(x, t)$.

Podemos representar a la forma de onda de la figura 4a como:

$$y(x, 0) = f(x), \quad (1)$$

donde f es una función que describe la forma de la onda. En el tiempo t , la forma de onda debe todavía describirse por la misma función f , porque hemos supuesto que la forma no cambia al viajar la onda. Con relación al origen O' de un marco de referencia que viaje con la pulsación, la forma se describe por la función $f(x')$, como se indica en la figura 4b. La relación entre las coordenadas x de los dos marcos de referencia es $x' = x - vt$, como puede verse en la figura 4b. Entonces, en el tiempo t , la onda se describe por

$$y(x, t) = f(x') = f(x - vt). \quad (2)$$

Es decir, la función $f(x - vt)$ tiene la misma forma relativa al punto $x = vt$ en el tiempo t que la función $f(x)$ tiene con relación al punto $x = 0$ en el tiempo $t = 0$.

Para describir por completo a la onda, debemos especificar a la función f . Más adelante, consideraremos a las ondas armónicas, en las cuales f es una función seno o coseno.

Las ecuaciones 1 y 2 juntas indican que podemos cambiar una función de cualquier forma en una onda que viaje en dirección x positiva simplemente sustituyendo a x por la cantidad $x - vt$ en todo lugar en que aparezca en la $f(x)$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces $f(x - vt) = (x - vt)^2$. Además, una onda que viaje en dirección x positiva debe depender de x y de t únicamente en la combinación $x - vt$; así pues, $x^2 - (vt)^2$ no representa a tal onda viajera.

Sigamos el movimiento de determinada parte (o fase) de la onda, tal como la de la posición P de la forma de onda de la figura 4. Si la onda ha de mantener su forma mientras viaja, entonces la coordenada y_p del punto P no debe cambiar. Vemos en la ecuación 2 que el único modo de que pueda suceder esto es que la coordenada x de P aumente mientras aumenta t , de modo que la cantidad $x - vt$ mantenga un valor fijo. Es decir, la evaluación de la cantidad $x - vt$ da el mismo resultado en P de la figura 4b que en P de la figura 4a. Esto continúa así en cualquier posición de la forma de onda y en todos los tiempos t . Entonces para el movimiento de cualquier fase particular de la onda debemos tener

$$x - vt = \text{constante}. \quad (3)$$

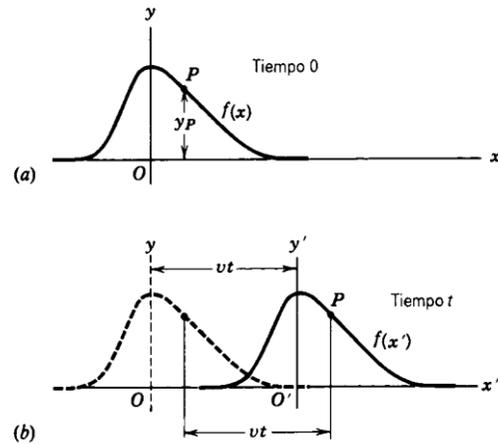


Figura 4 (a) Una pulsación transversal mostrada como una instantánea en el tiempo $t = 0$. El punto P representa una posición particular en la fase del pulso, no un punto particular del medio (la cuerda, por ejemplo). (b) En un tiempo t más tarde, la pulsación se ha movido una distancia vt en la dirección x positiva. El punto P de la fase se ha movido también una distancia vt . El máximo de la pulsación define el origen de la coordenada x' .

Podemos verificar que la ecuación 3 caracteriza al movimiento de la fase de la forma de onda al diferenciar respecto al tiempo, lo cual da

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{dx}{dt} = v. \quad (4)$$

La velocidad dx/dt describe al movimiento de la fase de la onda, y por ello se conoce como *velocidad de fase*. Consideramos que v es una constante positiva, independiente de cualquier propiedad de la onda pero posiblemente (como lo veremos) dependiente de las propiedades del medio.

Si la onda se mueve en dirección x negativa, debemos reemplazar a v por $-v$. En este caso, obtendríamos

$$y(x, t) = f(x + vt), \quad (5)$$

donde una vez más $f(x)$ representa a la forma en $t = 0$. Esto es, al sustituir en $f(x)$ la cantidad $x + vt$ en lugar de x nos da una onda que se movería hacia la izquierda en la figura 4. El movimiento de cualquier fase de la onda estaría entonces caracterizado por el requisito de que $x + vt = \text{constante}$, y por analogía con la ecuación 4 podemos demostrar que $dx/dt = -v$, indicando que la componente x de la velocidad de fase es realmente negativa en este caso.

La función $y(x, t)$ contiene la descripción completa de la forma de la onda y de su movimiento. En cualquier tiempo determinado, digamos t_1 , la función $y(x, t_1)$ da a y en función de x , lo cual define a una curva; esta curva representa la forma real de la cuerda en ese tiempo y puede considerarse como una "instantánea" de la onda. Por otra

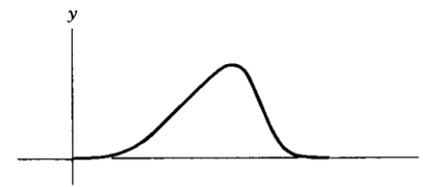


Figura 5 Un observador estacionado en un punto particular sobre el eje x registraría este desplazamiento y en función del tiempo en el transcurso de la pulsación de la figura 4. Nótese que la forma parece estar invertida, porque el borde delantero de la pulsación viajera llega al observador en los primeros momentos. Es decir, los desplazamientos registrados por el observador en los primeros momentos están aquí más cerca del origen.

parte, podemos tener en cuenta el movimiento de un punto particular sobre la cuerda, digamos en la coordenada fija x_1 . La función $y(x, t)$ nos da entonces la coordenada y de ese punto en función del tiempo. La figura 5 muestra cómo podría moverse un punto sobre el eje x con el tiempo en el transcurso de la pulsación de la figura 4, moviéndose en dirección x positiva. En los tiempos cercanos a $t = 0$, el punto no se mueve en absoluto. Luego, comienza a moverse gradualmente a medida que llega al borde delantero de la pulsación de la figura 4. Después de pasar el máximo de la onda, el desplazamiento del punto cae rápidamente hasta regresar a cero al pasar el borde de salida.

Ondas sinusoidales

La descripción anterior es bastante general. Es válida para formas de onda arbitrarias, y se cumple tanto para ondas transversales como longitudinales. Por ejemplo, consideremos una forma de onda transversal que tenga una forma sinusoidal, lo cual tiene aplicaciones particularmente importantes. Supongamos que en el tiempo $t = 0$ tenemos un tren de ondas a lo largo de la cuerda dado por

$$y(x, 0) = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (6)$$

En la figura 6 se muestra la forma de onda. El desplazamiento máximo y_m se llama *amplitud* de la curva seno. El desplazamiento transversal y tiene el mismo valor en cualquier x , como también en $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente. El símbolo λ representa la *longitud de onda* del tren de ondas e indica la distancia entre dos puntos adyacentes de la onda que tengan la misma fase. Si la onda viaja en dirección $+x$ con velocidad de fase v , entonces la ecuación de la onda es

$$y(x, t) = y_m \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt). \quad (7)$$

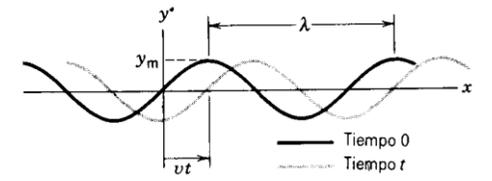


Figura 6 En $t = 0$ (en tono más intenso), la cuerda tiene la forma sinusoidal dada por $y = y_m \sin 2\pi x/\lambda$. En un tiempo t más tarde (en tono más claro), la onda se ha movido hacia la derecha una distancia $x = vt$, y la cuerda tiene una forma dada por $y = y_m \sin 2\pi(x - vt)/\lambda$.

Nótese que ésta tiene la forma $f(x - vt)$, necesaria para una onda viajera (Ec. 2).

El *periodo* T de la onda es el tiempo necesario para que un punto en cualquier coordenada x efectúe un ciclo completo de movimiento transversal. Durante este tiempo T , la onda viaja una distancia vT que debe corresponder a una longitud de onda λ , de modo que

$$\lambda = vT. \quad (8)$$

El inverso del periodo se llama *frecuencia* ν de la onda; $\nu = 1/T$. La frecuencia tiene unidades de ciclos por segundo, o hertz (Hz). El periodo y la frecuencia son dos temas tratados previamente en el capítulo 15.

Poniendo la ecuación 8 en la ecuación 7, obtenemos otra expresión para la onda:

$$y(x, t) = y_m \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right). \quad (9)$$

Según esta forma es claro que y , en cualquier tiempo dado, tiene el mismo valor en x , $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente, y que y , en cualquier posición dada, tiene el mismo valor en los tiempos t , $t + T$, $t + 2T$, y así sucesivamente.

Para reducir la ecuación 9 a una forma más compacta, introducimos dos cantidades, el *número de onda* k y la *frecuencia angular* ω . Éstas se definen por

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{y} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (10)$$

El número de onda k es, al igual que ω , una cantidad angular, y las unidades de ambos implican radianes. Las unidades de k podrían ser, por ejemplo, rad/m, y de ω , rad/s. En términos de estas cantidades, la ecuación de una onda seno que viaje en dirección x positiva (hacia la derecha en la Fig. 6) es

$$y(x, t) = y_m \sin (kx - \omega t). \quad (11)$$

La ecuación de una onda seno que viaje en dirección x negativa (hacia la izquierda en la Fig. 6) es

$$y(x, t) = y_m \sin (kx + \omega t). \quad (12)$$

Al comparar las ecuaciones 8 y 10, vemos que la velocidad de fase v de la onda está dada por

$$v = \lambda v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}. \quad (13)$$

Fase y constante de fase

En las ondas viajeras de las ecuaciones 11 y 12 hemos supuesto que el desplazamiento y es cero en la posición $x = 0$ en el tiempo $t = 0$. Esto, por supuesto, no tiene que ser aquí así. La expresión general para una onda sinusoidal que viaja en dirección x positiva es

$$y(x,t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t - \phi). \quad (14)$$

La cantidad que aparece en el argumento del seno, es decir, $kx - \omega t - \phi$, se llama *fase* de la onda. Se dice que dos ondas con la misma fase (o con fases que difieran en cualquier múltiplo entero de 2π) están "en fase"; ejecutan el mismo movimiento en el mismo tiempo.

El ángulo ϕ se llama la *constante de fase*. La constante de fase no afecta a la forma de la onda; mueve a la onda hacia adelante o hacia atrás en el espacio o en el tiempo. Para ver esto, reescribiremos la ecuación 14 en dos formas equivalentes:

$$y(x,t) = y_m \text{sen} \left[k \left(x - \frac{\phi}{k} \right) - \omega t \right] \quad (15a)$$

o

$$y(x,t) = y_m \text{sen} \left[kx - \omega \left(t + \frac{\phi}{\omega} \right) \right]. \quad (15b)$$

La figura 7a muestra una "instantánea" en cualquier tiempo t de las dos ondas representadas por las ecuaciones 11 (donde $\phi = 0$) y 14. Nótese que cualquier punto en particular de la onda descrita por la ecuación 15a (digamos, cierta cresta de onda) está a una distancia ϕ/k adelante del punto correspondiente de la onda descrita por la ecuación 11.

En forma equivalente, si observáramos el desplazamiento en una posición fija x resultante de cada una de las dos ondas representadas por las ecuaciones 11 y 14, obtendríamos el resultado indicado por la figura 7b. La onda descrita por la ecuación 15b está similarmente adelante de la onda que tiene a $\phi = 0$, en este caso por una diferencia de tiempo ϕ/ω .

Cuando la constante de fase de la ecuación 14 es positiva, la onda correspondiente está adelante de una onda descrita por una ecuación similar que tiene a $\phi = 0$. Por esta razón, introducimos a la constante de fase con signo negativo en la ecuación 14. Cuando una onda está adelante de otra en el tiempo o en el espacio, se dice que es la "guía". En cambio, al poner una constante de fase negativa en la ecuación 14, se mueve la onda correspondiente

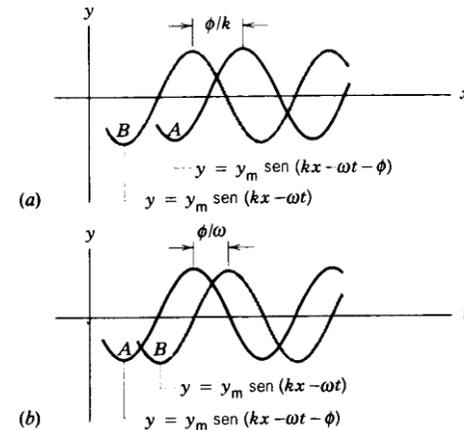


Figura 7 (a) Instantánea de dos ondas seno que viajan en dirección x positiva. La onda A tiene una constante de fase ϕ , y la onda B tiene a $\phi = 0$. La onda A está a una distancia ϕ/k adelante de la onda B . (b) Movimiento de un punto en el tiempo debido a las mismas dos ondas. La onda A está un tiempo ϕ/ω adelante de la onda B . Nótese que, en una gráfica de y contra t , "adelante de" significa "a la izquierda de", mientras que en una gráfica de y contra x , "adelante de" significa "a la derecha de", si las ondas viajan en dirección x positiva.

detrás de la otra que tenga $\phi = 0$; tal onda se dice que es la "rezagada".

Si fijamos nuestra atención en un punto en particular de la cuerda, digamos x_1 , el desplazamiento y en ese punto puede expresarse:

$$y(t) = -y_m \text{sen}(\omega t + \phi'),$$

donde hemos sustituido una constante de fase nueva $\phi' = \phi - kx_1$. Esta expresión de $y(t)$ es similar a la ecuación 6 del capítulo 15 para el movimiento armónico simple. De aquí que cualquier elemento particular de la cuerda experimente un movimiento armónico simple con respecto a su posición de equilibrio al viajar este tren de ondas a lo largo de la cuerda.

Velocidad de grupo y dispersión

Las ondas sinusoidales puras son elementos matemáticos útiles para ayudarnos a entender el movimiento ondulatorio. En la práctica, usamos otras clases de ondas para transportar energía e información. Estas ondas pueden ser periódicas pero no sinusoidales, tales como las ondas cuadradas o las de "diente de sierra", o pueden ser pulsaciones no periódicas, como las de la figura 4.

Hemos usado la velocidad de fase para describir el movimiento de dos clases de ondas: la onda pulsátil, que conserva su forma al viajar (Fig. 4) y la onda seno pura

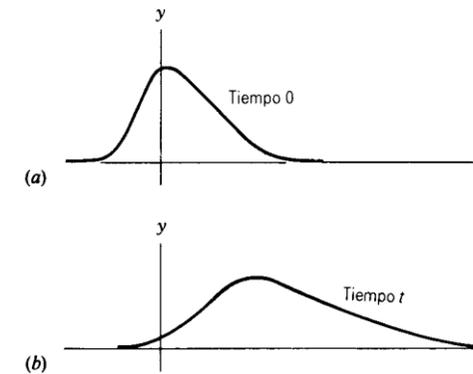


Figura 8 En un medio dispersivo, la forma de onda cambia al viajar la onda.

(Fig. 6). En otros casos, debemos usar una velocidad diferente, llamada la *velocidad de grupo*, que es la velocidad a la cual viaja la energía o la información en una onda real.

La figura 8 muestra una pulsación que viaja a través de un medio. La forma de la pulsación cambia al viajar; la pulsación se esparce, o *dispersa*. (Dispersión no es lo mismo que disipación de energía. El contenido de energía de la pulsación de la figura 8 puede permanecer constante mientras viaja, aunque la pulsación se disperse. Suponemos que el medio es *dispersivo*, pero no necesariamente *disipativo*.) Como veremos en la sección 19-7, cualquier onda periódica puede ser considerada como la suma o superposición de una serie de ondas sinusoidales de frecuencias diferentes o de longitudes de onda diferentes. Las frecuencias, amplitudes, y fases de las ondas sinusoidales componentes deben elegirse con cuidado de acuerdo con un procedimiento matemático, conocido como *análisis de Fourier*, de modo que las ondas se sumen para dar la forma de onda deseada. En muchos medios reales, la velocidad de propagación de estas ondas componentes (es decir, la velocidad de fase) depende de la frecuencia o de la longitud de onda de la componente en particular. Cada onda componente puede viajar con su velocidad propia. Entonces, al viajar la onda, las relaciones de fase de las componentes pueden cambiar, y la forma de onda de la suma de las componentes cambiaría de manera correspondiente al viajar la onda. Éste es el origen de la dispersión: las ondas componentes viajan a velocidades de fase diferentes. No existe una relación sencilla entre las velocidades de fase de las componentes y la velocidad de grupo de la onda; la relación depende de la dispersión del medio.

Ciertos medios reales son no dispersivos aproximadamente, en cuyo caso la onda mantiene su forma, y todas las ondas componentes viajan con la misma velocidad. Un ejemplo son las ondas sonoras en el aire. Si el aire fuese fuertemente dispersivo de las ondas sonoras, la conversa-

ción sería imposible, porque la forma de onda producida por las cuerdas vocales de quien habla confundiría siendo irreconocible al momento en que llegase a nuestros oídos. Además, el esmero que ponen los miembros de una orquesta por tocar precisamente al mismo tiempo no tendría ningún valor, porque (si el aire fuese dispersivo del sonido) las notas de alta frecuencia viajarían hasta el oído del oyente a una velocidad diferente de la de las notas de baja frecuencia, y el oyente escucharía los sonidos en tiempos diferentes. Por fortuna, esto no ocurre con las ondas sonoras. Las ondas de la luz en el vacío son perfectamente no dispersivas; la dispersión de las ondas de luz en medios reales es la causa de efectos tales como el espectro de colores del arcoiris.

En un medio no dispersivo, todas las ondas componentes de una forma de onda compleja viajan a la misma velocidad de fase, y la velocidad de grupo de la forma de onda es igual a ese valor común de la velocidad de fase. Únicamente en este caso podemos hablar de la velocidad de fase de la forma de onda entera. En este capítulo tratamos de las ondas mecánicas que se propagan en medios no dispersivos.

19-4 VELOCIDAD DE ONDA

La velocidad de onda, lo que aquí significa la velocidad de fase de una onda sinusoidal o la velocidad de grupo de una pulsación en un medio no dispersivo, no depende de la frecuencia o de la longitud de onda. Es posible calcular la velocidad de una onda mecánica a partir de las propiedades del medio aplicando los principios básicos de la mecánica newtoniana. En esta sección continuaremos centrando nuestra atención en las ondas transversales de una cuerda en tensión, y en la sección siguiente mostraremos cómo calcular la velocidad de tales ondas de la manera más general. Los cálculos de la velocidad de otras ondas, por ejemplo las ondas sonoras en el aire, siguen métodos similares.

Aquí consideraremos dos enfoques: un tratamiento basado en el análisis dimensional y un análisis mecánico un poco menos general por medio del cual calcularemos la velocidad de una pulsación transversal a lo largo de una cuerda tensa.

Análisis dimensional

La velocidad de las ondas de una cuerda musical depende de la masa de un elemento de la cuerda y de la fuerza entre elementos vecinos, la cual es la tensión F con la que se estira la cuerda. Si aumentamos la tensión (como al ajustar las clavijas de una cuerda de guitarra), la fuerza entre elementos vecinos aumentará, y podemos esperar que la

velocidad de la onda aumente también. Caracterizaremos a la masa de un elemento de la cuerda en términos de la densidad de masa lineal μ , la masa por unidad de longitud de la cuerda. Suponiendo que la velocidad de onda v dependa únicamente de F y de μ , podemos usar el método del análisis dimensional (véase la sección 1-7) y escribir

$$v \propto F^a \mu^b,$$

donde a y b son exponentes por determinarse a partir del análisis dimensional. En términos de las dimensiones de masa M , longitud L , y tiempo T , esto puede expresarse como:

$$[v] = [F^a][\mu^b]$$

$$LT^{-1} = (MLT^{-2})^a(ML^{-1})^b,$$

y resolviendo por igualación de las potencias correspondientes de M , L , y T se obtiene $a = \frac{1}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$. Así, $v \propto \sqrt{F/\mu}$, o, introduciendo una constante de proporcionalidad C ,

$$v = C \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (16)$$

Lo más que podemos decir de este análisis es que la velocidad de la onda es igual a una constante sin dimensiones multiplicada por $\sqrt{F/\mu}$. El valor de la constante puede obtenerse de un análisis mecánico del problema o por medio de la experimentación. Estos métodos demuestran que la constante es igual a la unidad.

Análisis mecánico

Derivemos ahora por medio de un análisis mecánico una expresión para la velocidad de una pulsación en una cuerda tensa. En la figura 9 se muestra una "instantánea" de una pulsación de onda que se mueve de izquierda a derecha en la cuerda con una velocidad v . Podemos imaginar en su lugar que toda la cuerda se mueve de derecha a izquierda con esta misma velocidad, de modo que la pulsación de la onda permanece fija en el espacio (quizás metiendo a la cuerda en un tubo carente de fricción que tenga la forma deseada de la pulsación). Esto significa simplemente que, en lugar de considerar que nuestro marco de referencia sean las paredes entre las que se estira la cuerda, escogemos un marco de referencia que esté en movimiento uniforme con respecto a aquél. En efecto, observamos a la pulsación mientras corremos a lo largo de la cuerda con la misma velocidad que la pulsación. Puesto que las leyes de Newton implican sólo aceleraciones, las cuales son iguales en ambos marcos, podemos emplearlas en cualquiera de los marcos. Nos inclinamos, entonces, por el marco que para nosotros resulta más conveniente.

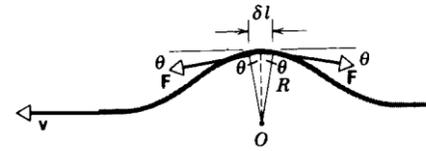


Figura 9 Una pulsación que se mueva hacia la derecha en una cuerda estacionaria es equivalente a una pulsación en posición fija en una cuerda que se mueva hacia la izquierda. Consideramos las fuerzas en una sección de cuerda de longitud δl en la pulsación "fija".

Consideremos a una pequeña sección de la pulsación de longitud δl , como se muestra en la figura 9. Esta sección forma aproximadamente un arco de círculo de radio R . La masa δm de este elemento es $\mu \delta l$, donde μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. La tensión F en la cuerda es un tirón tangencial en cada extremo de este pequeño segmento de la cuerda. Las componentes horizontales de F se cancelan, y las componentes verticales son cada una igual a $F \sin \theta$. De aquí que la fuerza vertical total F_{\perp} sea $2F \sin \theta$. Debido a que θ es pequeño, podemos considerar que $\sin \theta \approx \theta$. Partiendo de la figura 9, vemos que $2\theta = \delta l/R$, y así obtenemos

$$F_{\perp} = 2F \sin \theta \approx 2F\theta = F \frac{\delta l}{R}. \quad (17)$$

Esto da la fuerza que suministra la aceleración centrípeta de las partículas de cuerda dirigidas hacia O . La fuerza centrípeta que actúa sobre una masa δm ($= \mu \delta l$) que se mueve en círculo de radio R a velocidad v es $\delta m v^2/R$. Nótese que la velocidad tangencial v de este elemento de masa a lo largo de la parte superior del arco es horizontal y de magnitud igual a la velocidad de la onda. Igualando la fuerza vertical neta sobre el elemento, ecuación 17, con la fuerza centrípeta necesaria, obtenemos

$$F_{\perp} = \frac{\delta m v^2}{R}$$

o bien

$$F \frac{\delta l}{R} = \frac{\mu \delta l v^2}{R}$$

por lo que

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (18)$$

La ecuación 18 muestra, a partir de un análisis mecánico, que la constante C en la ecuación 16 tiene el valor 1.

Si la amplitud de la pulsación fuese muy grande en comparación con la longitud de la cuerda, no habríamos tenido la posibilidad de usar la aproximación $\sin \theta \approx \theta$. Además, la tensión F de la cuerda cambiaría por la presencia de la pulsación, mientras que hemos supuesto que

F no cambia a partir de la tensión original de la cuerda estirada. Por lo tanto, nuestro resultado cumple únicamente para desplazamientos transversales de la cuerda relativamente pequeños, un caso que es ampliamente aplicable en la práctica.

Una onda periódica que entra en un medio suele ser consecuencia de una influencia externa que perturba al medio a una cierta frecuencia. La onda que viaja a través de ese medio tendrá la misma frecuencia que la fuente de la onda. La velocidad de la onda está determinada por las propiedades del medio. Dadas la frecuencia ν de la onda y su velocidad v en el medio, la longitud de onda de la onda periódica en ese medio se determina por la ecuación 13, $\lambda = v/\nu$. Cuando una onda pasa de un medio a otro de velocidad de onda diferente (por ejemplo, dos cuerdas con densidades de masa lineal diferentes), la frecuencia en un medio debe ser la misma que la frecuencia en el otro. (De otro modo existiría una discontinuidad en el punto en que se junten las dos cuerdas.) Sin embargo, las longitudes de onda diferirán una de otra. La relación entre las longitudes de onda se deduce de la igualdad de las frecuencias ν_1 y ν_2 en los dos medios; es decir, $\nu_1 = \nu_2$ da

$$\frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}. \quad (19)$$

Velocidad transversal de una partícula

El movimiento de una partícula en una onda transversal como la de la figura 6 es en dirección y . La velocidad de la onda describe el movimiento de la onda a lo largo de la dirección de viaje (la dirección x). La velocidad de la onda no caracteriza el movimiento transversal de las partículas de la cuerda.

Para hallar la velocidad transversal de una partícula de la cuerda necesitamos el cambio en la coordenada y con el tiempo. Así, centramos nuestra atención en una partícula aislada de la cuerda, es decir, en cierta coordenada x . Por lo tanto, necesitaremos la derivada de y con respecto a t siendo x constante. Esto se representa por el símbolo $\partial y/\partial t$, el cual indica la derivada parcial de y con respecto a t , manteniendo constantes a todas las demás variables de las que pueda depender y . Representamos a la velocidad de la partícula, la cual varía tanto con x (la posición de la partícula) como con t , con la expresión $u(x,t)$. Suponiendo que tenemos una onda sinusoidal de la forma de la ecuación 14, tenemos entonces que

$$u(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [y_m \sin(kx - \omega t - \phi)]$$

$$= -y_m \omega \cos(kx - \omega t - \phi). \quad (20)$$

Continuando de esta manera, podemos hallar la aceleración transversal de la partícula en esta posición de x de acuerdo con

$$a(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} = -y_m \omega^2 \sin(kx - \omega t - \phi)$$

$$= -\omega^2 y. \quad (21)$$

La ecuación 21 tiene la misma forma que la ecuación 5 del capítulo 15; la aceleración transversal de cualquier punto es proporcional a su desplazamiento transversal, pero dirigida en sentido opuesto. Esto demuestra que cada partícula de la cuerda experimenta un movimiento armónico simple transversal al pasar la onda sinusoidal.

Problema muestra 1 En un extremo de una cuerda horizontal larga se genera una onda sinusoidal transversal por medio de una barra que mueve al extremo de arriba a abajo en una distancia de 1.30 cm. El movimiento es continuo y se repite regularmente 125 veces por segundo. (a) Si la cuerda tiene una densidad lineal de 0.251 kg/m y se mantiene sometida a una tensión de 96 N, halle la amplitud, la frecuencia, la velocidad, y la longitud de onda del movimiento de la onda. (b) Suponiendo que la onda se mueva en dirección $+x$ y que, en $t = 0$, el elemento de la cuerda en $x = 0$ esté en su posición de equilibrio $y = 0$ y moviéndose hacia abajo, halle la ecuación de la onda.

Solución (a) Al moverse la barra un total de 1.30 cm, el extremo de la cuerda se mueve $\frac{1}{2}(1.30 \text{ cm}) = 0.65 \text{ cm}$ fuera de su posición de equilibrio, primero sobre ella, luego bajo ella; por lo tanto, la amplitud y_m es 0.65 cm.

El movimiento íntegro se repite 125 veces cada segundo, y entonces la frecuencia es de 125 vibraciones por segundo, o $\nu = 125 \text{ Hz}$.

La velocidad de la onda está dada por la ecuación 18,

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{96 \text{ N}}{0.251 \text{ kg/m}}} = 19.6 \text{ m/s}.$$

La longitud de onda está dada por $\lambda = v/\nu$, de modo que

$$\lambda = \frac{19.6 \text{ m/s}}{125 \text{ Hz}} = 0.156 \text{ m} = 15.6 \text{ cm}.$$

(b) La expresión general para una onda sinusoidal transversal que se mueve en la dirección $+x$ está dada por la ecuación 14,

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t - \phi).$$

Imponiendo las condiciones iniciales dadas ($y = 0$ y $\partial y/\partial t < 0$ para $x = 0$ y $t = 0$) tenemos

$$y_m \sin(-\phi) = 0 \quad \text{y} \quad -y_m \omega \cos(-\phi) < 0,$$

lo cual significa que puede considerarse que la constante de fase ϕ es cero (o cualquier entero múltiplo de 2π). De aquí que, para esta onda,

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t),$$

y con los valores que acabamos de hallar,

$$y_m = 0.65 \text{ cm},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.156 \text{ m}} = 40.3 \text{ rad/m} = 0.403 \text{ rad/cm},$$

$$\omega = vk = (19.6 \text{ m/s})(40.3 \text{ rad/m}) = 789 \text{ rad/s},$$

obtenemos como ecuación de la onda

$$y(x,t) = 0.65 \text{ sen } (0.403x - 789t),$$

donde x y y están en centímetros y t está en segundos.

Problema muestra 2 Cuando la onda del problema muestra 1 pasa a lo largo de la cuerda, cada partícula de la cuerda se mueve hacia arriba y hacia abajo en ángulo recto con la dirección del movimiento de la onda. (a) Halle expresiones para la velocidad y la aceleración de una partícula P situada en $x_p = 0.245$ m. (b) Evalúe el desplazamiento transversal, la velocidad, y la aceleración de esta partícula en $t = 1.5$ s.

Solución (a) Para una partícula en $x_p = 0.245$ m = 24.5 cm en la onda del problema muestra 1, obtenemos, usando la ecuación 20 con $\phi = 0$,

$$u(x_p,t) = -(0.65)(789) \cos [(0.403)(24.5) - 789t] \\ = -513 \cos (9.87 - 789t),$$

donde u está en cm/s y t está en segundos. De modo similar, usando la ecuación 21, hallamos que la aceleración es

$$a(x_p,t) = -(0.65)(789)^2 \text{ sen } (9.87 - 789t) \\ = -(4.05 \times 10^5) \text{ sen } (9.87 - 789t),$$

donde a está en cm/s^2 .

(b) En $t = 1.5$ s, evaluamos las expresiones para y , u , y a para dar

$$y = +0.63 \text{ cm}, \quad u = -125 \text{ cm/s}, \quad a = -3.93 \times 10^5 \text{ cm/s}^2.$$

Es decir, la partícula está cerca de su desplazamiento positivo máximo, se mueve en dirección y negativa (alejándose de ese máximo), y está acelerando en dirección y negativa (su velocidad está creciendo en magnitud al moverse la partícula hacia su posición de equilibrio).

19-5 LA ECUACIÓN DE LA ONDA (Opcional)

En el capítulo 15 hemos tratado el fenómeno de la oscilación que comúnmente encontramos. Una razón de que este fenómeno sea tan común es que la ecuación básica que describe a un sistema oscilatorio [$x = x_m \cos(\omega t + \phi)$, ecuación 6 del capítulo 15] es una solución de la ecuación 5 del capítulo 15,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x,$$

que es una ecuación de una forma general que puede derivarse a partir de un análisis mecánico de una variedad de situaciones físicas, alguna de las cuales se trataron en la sección 15-5.

La situación es similar en el caso del movimiento ondulatorio. Como lo demostramos en esta sección, el análisis mecánico da una ecuación de otra forma encontrada comúnmente, cuya solución es una onda de la forma dada por la ecuación 2 o por la ecuación 5.

La figura 10 muestra un elemento de una cuerda larga que sometido a una tensión F . El tránsito de una onda ha provocado que el elemento sea desplazado de su posición de equilibrio en $y = 0$. Consideramos al elemento de la cuerda de longitud δx , y

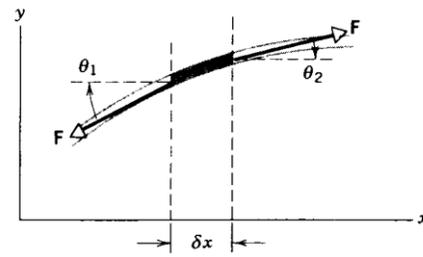


Figura 10 Un pequeño elemento de longitud δx de una cuerda larga en tensión F . La figura representa una instantánea del elemento en un tiempo en particular durante el tránsito de una onda.

aplicamos la segunda ley de Newton para analizar cómo se mueve este elemento.

Sobre el elemento actúan dos fuerzas ejercidas por las partes de la cuerda a cada lado del elemento. Estas fuerzas tienen magnitudes iguales, porque la tensión está distribuida uniformemente a lo largo de la cuerda, pero tienen direcciones ligeramente distintas, porque actúan tangentes a la cuerda en los puntos extremos del elemento. La fuerza neta en la dirección y es

$$F_y = F \text{ sen } \theta_2 - F \text{ sen } \theta_1.$$

Consideramos únicamente desplazamientos pequeños a partir del equilibrio, de modo que los ángulos θ_1 y θ_2 son pequeños, y podemos escribir que $\text{sen } \theta \approx \tan \theta$, lo cual da

$$F_y \approx F \tan \theta_2 - F \tan \theta_1 = F \delta(\tan \theta), \quad (22)$$

donde $\delta(\tan \theta) = \tan \theta_2 - \tan \theta_1$. Esta fuerza resultante debe ser igual a la masa del elemento, $\delta m = \mu \delta x$, multiplicada por la componente y de la aceleración. Despreciando la fuerza de fricción y otras fuerzas disipativas, hallamos que la segunda ley de Newton da

$$F_y = \delta m a_y$$

$$F \delta(\tan \theta) = \mu \delta x a_y$$

$$\frac{\delta(\tan \theta)}{\delta x} = \frac{\mu}{F} a_y.$$

Para la componente y de la aceleración a_y , usamos la aceleración transversal de una partícula, $\partial^2 y / \partial t^2$. También, reemplazamos a $\tan \theta$, que es la pendiente de la cuerda, por la derivada parcial equivalente $\partial y / \partial x$. Haciendo estas sustituciones, obtenemos

$$\frac{\delta(\partial y / \partial x)}{\delta x} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (23)$$

Consideremos ahora el límite de la ecuación 23 cuando el elemento de masa se vuelve muy pequeño. El lado izquierdo está en la forma normal para expresar la derivada respecto a x como un límite:

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta(\partial y / \partial x)}{\delta x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

y el resultado final es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (24)$$

Reemplazando a μ/F por $1/v^2$, obtenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (25)$$

La ecuación 25 es la forma general de la ecuación que describe a las ondas: la segunda derivada del desplazamiento de onda y respecto a la coordenada x en dirección de la propagación es igual a $1/v^2$ multiplicado por la segunda derivada respecto al tiempo. Esta forma general de ecuación se llama *ecuación de onda*. Surge no solamente en la mecánica sino también en otras situaciones. Por ejemplo, como veremos en el capítulo 41, si usamos las ecuaciones del electromagnetismo en lugar de las ecuaciones de la mecánica (las leyes de Newton), obtenemos una ecuación de exactamente la misma forma que la ecuación 25, excepto que el desplazamiento y se sustituye por la intensidad de un campo magnético o eléctrico. La velocidad de propagación v de las ondas electromagnéticas que viajan en un vacío se convierten en la velocidad de la luz c .

Veamos ahora cómo la solución de la ecuación 25 es nuestra fórmula general para una onda viajera, $y(x,t) = f(x \pm vt)$. Hagamos un simple cambio de variable y que z represente a $x \pm vt$, de modo que $y = f(z)$. Entonces, usando repetidamente la regla de la cadena del cálculo,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d}{dz} \left(\frac{df}{dz} \right) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dz^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = \pm v \frac{df}{dz}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{d}{dz} \left(\pm v \frac{df}{dz} \right) \frac{\partial z}{\partial t} = (\pm v)^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dz^2}.$$

Así,

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

y se satisface la ecuación 25. Puede demostrarse que únicamente las combinaciones $x \pm vt$ en f satisfacen a la ecuación de onda, de modo que todas las ondas viajeras deben tener la forma de la ecuación 2 o de la ecuación 5.

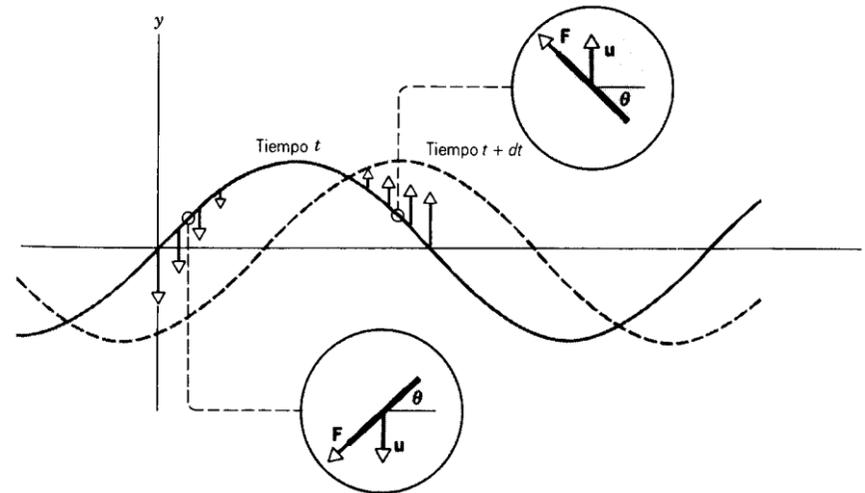


Figura 11 Los vectores en la dirección y muestran el valor de la velocidad instantánea u de diferentes puntos de la cuerda al viajar la onda seno. La línea punteada muestra la onda en un tiempo posterior, cuando las partículas se han movido en la dirección dada por sus vectores de velocidad. Las intercalaciones muestran la fuerza sobre dos elementos diferentes de la cuerda, ejercida por el elemento de su izquierda. Nótese que la potencia instantánea $u \cdot F$ es positiva, sin importar dónde estemos dentro de la fase de la onda.

19-6 POTENCIA E INTENSIDAD EN EL MOVIMIENTO ONDULATORIO

Si, como lo sugiere la figura 1, estuviese usted sacudiendo (y por tanto efectuando un trabajo en) el extremo de una cuerda, un compañero que estuviese en el otro extremo podría extraer la energía resultante (la cual se transporta a lo largo de la cuerda en la forma de la energía potencial y la energía cinética de sus elementos) y usarla para efectuar un trabajo en otro sistema. Tal transporte de energía (y de ímpetu) es, de hecho, uno de los objetivos de producir ondas. En esta sección consideraremos la cantidad de energía que transporta la cuerda.

La figura 11 muestra una instantánea de la onda en los tiempos t y $t + dt$. Un punto de la cuerda con coordenada x tiene en un tiempo t una velocidad transversal u , la cual tiene una componente y únicamente. Esta velocidad, como hemos ya visto en la sección 19-4, no se relaciona con la velocidad de fase de la onda, sino que más bien tiene la magnitud dada por la ecuación 20 con $\phi = 0$,

$$u = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_m \cos(kx - \omega t)$$

para una onda sinusoidal de la forma dada por la ecuación 11.

En la figura 11 se muestra también la fuerza ejercida sobre un elemento de la cuerda por el elemento de su izquierda. La fuerza transmite energía en una cantidad dada por la ecuación 23 del capítulo 7, $P = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F} = uF_y$.

Únicamente la componente F_y de \mathbf{F} a lo largo de \mathbf{u} contribuye a la potencia; esta componente es $F \sin \theta$, la cual, para pequeños desplazamientos, puede ser aproximada como $F \tan \theta = F \partial y / \partial x$, donde $\partial y / \partial x$ es la pendiente de la cuerda en la coordenada x .

Nótese que la componente y de \mathbf{F} es paralela a \mathbf{u} , sin importar si el elemento de la cuerda se está moviendo hacia arriba o hacia abajo. Así, $uF_y \geq 0$, y por lo tanto la potencia transmitida nunca es negativa durante el ciclo de oscilación. Existe un flujo neto continuo de energía en dirección x positiva (la dirección de propagación de la onda).

Sustituyendo a la componente y de la fuerza, obtenemos

$$P = uF_y = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) \left(F \frac{\partial y}{\partial x}\right) = F[-\omega y_m \cos(kx - \omega t)][-ky_m \cos(kx - \omega t)] = y_m^2 k \omega F \cos^2(kx - \omega t)$$

o sea

$$P = y_m^2 \mu v \omega^2 \cos^2(kx - \omega t), \quad (26)$$

donde hemos usado $v = F/\mu$ y $v = \omega/k$.

Nótese que la potencia o cantidad de flujo de energía no es constante. Esto se debe a que la potencia de entrada oscila: el trabajo efectuado por la mano que está moviendo el extremo de la cuerda varía con el desplazamiento transversal de ese punto. Cuando se transporta energía a lo largo de la cuerda, la energía se almacena en cada elemento de la cuerda como una combinación de energía cinética y de energía potencial de deformación. Esto es similar al caso del oscilador armónico simple.

A menudo se considera que esta entrada de potencia a la cuerda es el promedio en un periodo del movimiento. La potencia promedio abastecida es de

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P dt, \quad (27)$$

donde T es el periodo. El valor promedio de $\sin^2 \theta$ o de $\cos^2 \theta$ en un ciclo de $\frac{1}{2}$, y así obtenemos, usando la ecuación 26,

$$\bar{P} = \frac{1}{2} y_m^2 \mu v \omega^2, \quad (28)$$

resultado que no depende de x ni de t . La dependencia de la tasa de transferencia de energía del *cuadrado* de la amplitud de onda y del *cuadrado* de la frecuencia de onda es así, en general, para todos los tipos de ondas.

A menudo es más útil especificar la *intensidad* de la onda en una onda tridimensional, como en el caso de una onda de luz o una onda de sonido que proviene de una fuente puntual. La intensidad I se define como la *potencia promedio por unidad de área transmitida a través de un área A normal a la dirección en que viaja la onda*, es decir,

$$I = \frac{\bar{P}}{A}. \quad (29)$$

Al igual que con la potencia en la onda que viaja a lo largo de la cuerda, la intensidad de cualquier onda es siempre proporcional al cuadrado de la amplitud. (Sin embargo, en ondas circulares o esféricas, la amplitud no es constante al viajar el frente de la onda; véase el problema muestra 3.)

La energía puede disiparse mientras la onda se propaga a través del espacio. La energía mecánica de la onda puede convertirse en energía interna de la cuerda o en energía calorífica transmitida al entorno mediante la fricción interna u otros efectos viscosos. En este capítulo despreciamos tales transformaciones de la energía y suponemos que no se pierde energía mecánica.

Problema muestra 3 Las ondas esféricas viajan a partir de una fuente de ondas cuya potencia de salida, supuesta constante, es P ; véase la figura 12. ¿Cómo depende de la intensidad de la onda de la distancia a partir de la fuente?

Solución Suponemos que el medio es isotrópico y que la fuente irradia uniformemente en todas direcciones, es decir, su emisión es simétricamente esférica.

La intensidad de una onda está dada por la ecuación 29. La potencia se distribuye uniformemente sobre cualquier superficie esférica de área $A = 4\pi r^2$, y entonces

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}.$$

La intensidad de la onda varía inversamente con el cuadrado de su distancia desde la fuente. Puesto que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la amplitud de la onda debe variar inversamente con la distancia desde la fuente. Así, por ejemplo, al duplicar la distancia desde una fuente, la amplitud de una onda esférica disminuye a la mitad, y la intensidad es de únicamente la cuarta parte.

19-7 EL PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

A menudo observamos que dos o más ondas viajan en forma simultánea por la misma región del espacio, independientemente entre sí. Por ejemplo, el sonido que llega a nuestros oídos proveniente de una orquesta sinfónica es muy complejo, pero podemos captar el sonido emitido por cada uno de los instrumentos por separado. En las antenas de nuestros aparatos de radio y de TV, los electrones se ponen en movimiento por todo un conjunto de señales que parten de centros de emisión diferentes, y sin embargo podemos sintonizar cualquier estación en particular, y la señal que recibimos de esa estación es,

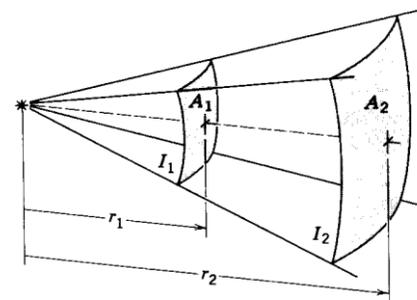


Figura 12 Problema muestra 3.

en principio, la misma que la que recibiríamos si todas las demás estaciones cesaran de emitir.

Los ejemplos anteriores ilustran el *principio de superposición*, que postula que, cuando varias ondas se combinan en un punto, el desplazamiento de cualquier partícula en un tiempo dado es simplemente la suma vectorial de los desplazamientos que produciría cada onda individual que actúe por sí sola. Por ejemplo, supongamos que dos ondas viajen simultáneamente a lo largo de la misma cuerda tensada. Sean $y_1(x,t)$ y $y_2(x,t)$ los desplazamientos que la cuerda experimentaría si cada onda actuase por separado. El desplazamiento de la cuerda al actuar ambas ondas es, entonces,

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t), \quad (30)$$

siendo algebraica la suma en este caso.

Para las ondas mecánicas en medios elásticos, el principio de superposición es válido cuando la fuerza de restitución varía linealmente con el desplazamiento. Para las ondas electromagnéticas, el principio de superposición es válido porque los campos eléctricos y magnéticos se relacionan linealmente.

La figura 13 muestra una secuencia de tiempo de "instantáneas" de dos pulsaciones que viajan en direcciones opuestas en la misma cuerda tensada. Cuando las pulsaciones se superponen, el desplazamiento de la cuerda es la suma algebraica de los desplazamientos individuales de la cuerda provocados por cada una de las dos pulsaciones por separado, como lo exige la ecuación 30. Las pulsaciones se mueven simplemente entrecruzándose viajando cada una de ellas a lo largo como si la otra no existiera.

El principio de superposición puede parecer un resultado obvio, pero hay casos en los que éste no se cumple. Supongamos, por ejemplo, que una de las ondas tiene una amplitud tan grande que supera el límite elástico del medio. La fuerza de restitución ya no es directamente proporcional al desplazamiento de una partícula en el medio. Entonces, sin importar cuál sea la amplitud de la segunda onda (incluso si es muy pequeña), su efecto en un punto no es una función lineal de su amplitud. Además,

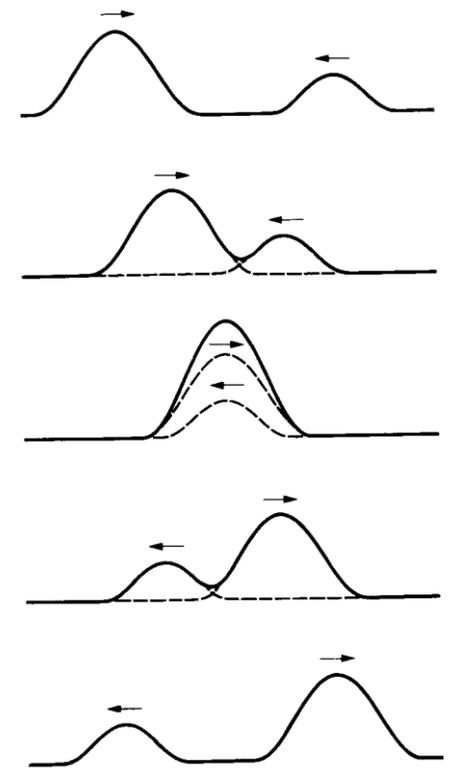


Figura 13 Dos pulsaciones viajan en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda tensada. Se aplica el principio de superposición al entrecruzarse una y otra.

la segunda onda cambiará al pasar a través de la región no lineal, y su comportamiento posterior se alterará. Esta situación surge sólo muy raramente, y en la mayoría de los casos es válido el principio de superposición (como lo suponemos a lo largo de este texto).

Ondas complejas

Cuando dos o más ondas diferentes, que puedan tener diferentes amplitudes y longitudes de onda, se hallan presentes de manera simultánea en un medio, podemos aplicar el principio de superposición en cada punto y obtener un patrón de onda $y(x,t)$ complejo que no se parezca en absoluto a las ondas que lo componen. Sin embargo, es una forma de onda viajera aceptable.

La figura 14a muestra un ejemplo del caso de dos ondas seno de igual amplitud cuya longitud de onda está en la razón de 3:1. Las ondas viajan en la misma dirección y con la misma velocidad de fase. Están en fase en $x = 0$. La curva más oscura muestra la forma de onda resultante que puede calcularse empleando la ecuación 30. Nótese que no es una onda seno. En la figura 14b, las dos ondas combinadas son idénticas a las de la figura 14a, excepto

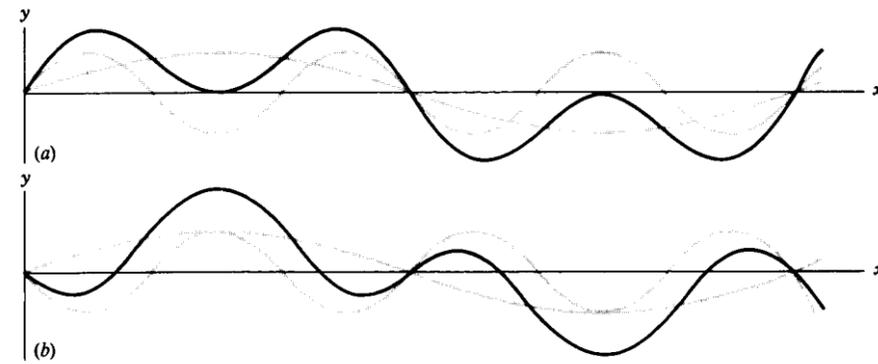


Figura 14 La adición de dos ondas con una razón de longitud de onda de 3:1 (línea más clara) produce una onda cuya forma (línea más intensa) depende de la relación de fase de las dos ondas. Compárense (a) y (b), que muestran relaciones de fase diferentes de las ondas sumadas.

que están 180° fuera de fase en $x = 0$. La forma de onda resultante es bastante diferente de la de la figura 14a.

Al cambiar la designación del eje horizontal en la figura 14 de x a t , tendríamos una representación de la superposición de dos ondas en función del tiempo en un punto en particular. Tal gráfica podría representar, por ejemplo, el movimiento en el tiempo de un punto en particular de una cuerda en respuesta a la combinación de dos ondas.

Análisis de Fourier (Opcional)

Físicamente, la importancia del principio de superposición es que, cuando es válido, permite analizar un movimiento ondulatorio complicado como una combinación de ondas sencillas. De hecho, como el matemático francés J. Fourier (1768-1830) pudo demostrar que, para construir la forma más general de una onda periódica sólo necesitamos ondas armónicas simples. Fourier demostró que cualquier movimiento periódico de una partícula puede ser representado como una combinación de movimientos armónicos simples. Por ejemplo, si $y(x)$ representa la forma de onda (en un tiempo en particular) de una fuente de ondas que tengan una longitud de onda λ , podemos analizar a $y(x)$ como sigue:

$$y(x) = A_0 + A_1 \text{ sen } kx + A_2 \text{ sen } 2kx + A_3 \text{ sen } 3kx + \dots + B_1 \text{ cos } kx + B_2 \text{ cos } 2kx + B_3 \text{ cos } 3kx + \dots, \quad (31)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$. Esta expresión se conoce como serie de Fourier. Los coeficientes A_i y B_i tienen valores definidos para cualquier movimiento periódico $y(x)$ en particular. Por ejemplo, la llamada onda de diente de sierra de la figura 15 puede escribirse

$$y(x) = -\frac{1}{\pi} \text{ sen } kx - \frac{1}{2\pi} \text{ sen } 2kx - \frac{1}{3\pi} \text{ sen } 3kx - \dots$$

Si el movimiento no es periódico, como en el caso de una pulsación, la suma se sustituye por una integral: la integral de Fourier. De aquí que cualquier movimiento (pulsado o continuo) de una fuente de ondas pueda ser representado en términos de una superposición de movimientos armónicos simples, y que cualquier forma de onda así generada pueda ser analizada como una combinación de componentes que son, por separado, ondas armónicas simples. Esto ilustra una vez más la importancia del movimiento armónico y de las ondas armónicas.

La forma de onda mantendrá su forma únicamente al viajar en un medio no dispersivo. En un medio dispersivo, las formas de onda de las ondas sinusoidales componentes no cambian, pero cada una de ellas puede viajar con una velocidad diferente. En este caso, la forma de la onda combinada cambia al alterarse

la relación de fase entre las componentes. La onda puede también cambiar de forma si cede energía mecánica al medio, tal como por la resistencia del aire, la viscosidad, o la fricción interna. Tales fuerzas disipativas dependen a menudo de la velocidad, y así las componentes de Fourier más fuertemente afectadas son aquellas con velocidades más elevadas de la partícula (es decir, aquellas con frecuencias altas, de acuerdo con la ecuación 20, donde se ve que u depende de ω). Aquí, una vez más, la forma de onda puede cambiar, al perder amplitud más rápidamente las componentes con frecuencias más altas. Un ejemplo de este fenómeno es el debilitamiento con el tiempo del sonido de las cuerdas del piano. El movimiento vibratorio de una cuerda de piano, inmediatamente después de haber sido percutida por el martillo, incluye una amplia gama de frecuencias, las cuales le dan su tono característico. Las componentes de más alta frecuencia de este movimiento complejo disipan su energía más rápidamente que las componentes de frecuencia más baja, por lo que el carácter de duración de un tono puede cambiar con el tiempo. ■

19-8 INTERFERENCIA DE ONDAS

Cuando dos o más ondas se combinan en un punto determinado, se dice que *interfieren*, y el fenómeno se conoce como *interferencia*. Como veremos, la forma de onda resultante depende fuertemente de las fases relativas de las ondas que interfieren. La figura 16 muestra un ejemplo de interferencia de ondas.

Consideremos en primer lugar dos ondas sinusoidales transversales de igual amplitud y longitud de onda, que viajan en dirección x con la misma velocidad. Hagamos que la constante de fase de una onda sea ϕ , mientras que la de la otra es $\phi = 0$. La figura 17 muestra la forma de onda combinada en un tiempo para los dos casos de ϕ cercano a 0° (las ondas están prácticamente en fase) y de ϕ cercano a 180° (las ondas están prácticamente fuera de fase). Simplemente sumando los desplazamientos individuales en cada x puede verse que en el primer caso existe un refuerzo casi completo de las dos ondas y la resultante tiene casi el doble de la amplitud de sus componentes individuales, mientras que en el segundo caso existe una cancelación casi completa en cada punto y la

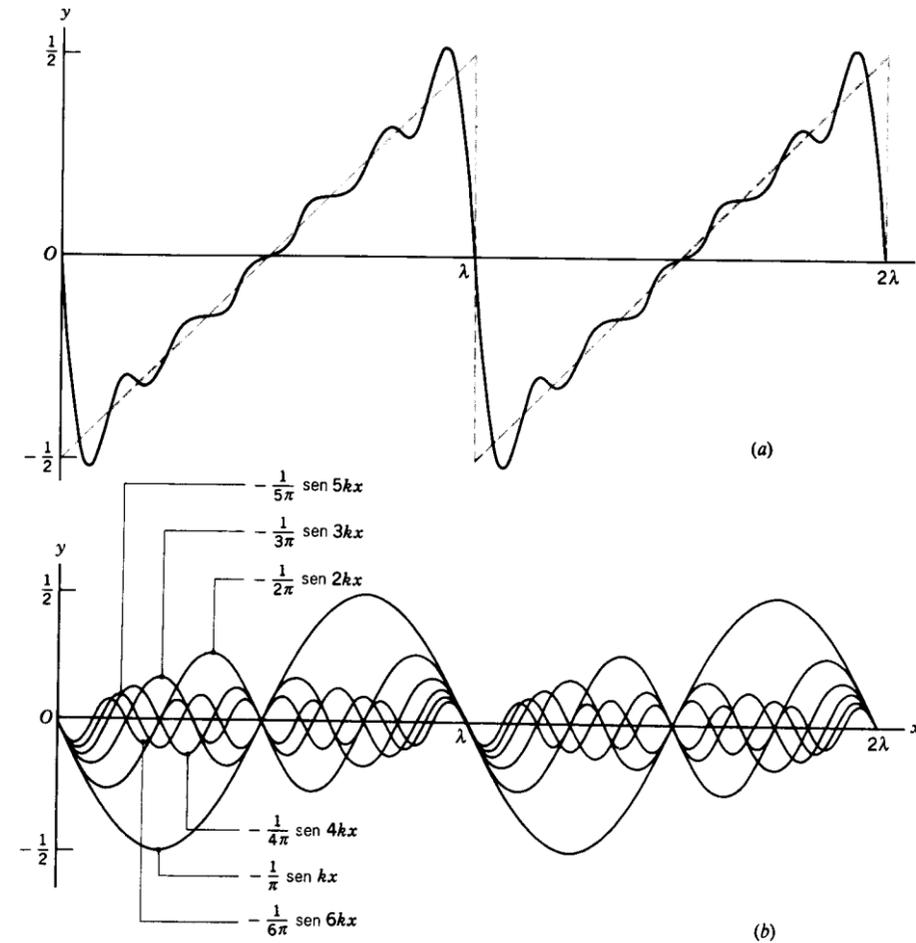


Figura 15 (a) La línea punteada es una onda de diente de sierra muy común en electrónica. Puede representarse por medio de una serie de Fourier de ondas seno. (b) Se muestran las primeras seis ondas seno de la serie de Fourier que representan a la onda de diente de sierra, y su suma se muestra en la parte (a) por medio de una curva de línea continua. Al incluir más términos, la serie de Fourier resulta una mejor aproximación de la onda.

amplitud resultante está cerca de cero. Estos casos se conocen, respectivamente, como *interferencia constructiva* e *interferencia destructiva*.

Veamos cómo surge la interferencia de las ecuaciones de las ondas. Consideremos un caso general en el que las dos ondas tengan constantes de fase ϕ_1 y ϕ_2 , respectivamente. Las ecuaciones de las dos ondas son

$$y_1(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t - \phi_1) \quad (32)$$

$$y_2(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t - \phi_2). \quad (33)$$

Hallemos ahora la onda resultante. Usando el principio de superposición, tomamos la suma de las ecuaciones 32 y 33, lo cual da

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_m [\text{sen } (kx - \omega t - \phi_1) + \text{sen } (kx - \omega t - \phi_2)]. \quad (34)$$

Partiendo de la identidad trigonométrica para la suma de los senos de dos ángulos,

$$\text{sen } B + \text{sen } C = 2 \text{ sen } \frac{1}{2}(B + C) \text{ cos } \frac{1}{2}(B - C), \quad (35)$$

obtenemos, después de cierto manejo,

$$y(x,t) = [2y_m \text{ cos } (\Delta\phi/2)] \text{ sen } (kx - \omega t - \phi'), \quad (36)$$

donde $\phi' = (\phi_1 + \phi_2)/2$. La cantidad $\Delta\phi = (\phi_2 - \phi_1)$ se llama *diferencia de fase* entre las dos ondas.

Esta onda resultante corresponde a una nueva onda que tiene la misma frecuencia pero una amplitud $2y_m |\text{cos } (\Delta\phi/2)|$. Si $\Delta\phi$ es muy pequeño (comparado con 180°), la amplitud resultante es casi $2y_m$ (como se muestra en la Fig. 17a). Cuando $\Delta\phi$ es cero, las dos ondas tienen la misma fase en cualquier parte. La cresta de una cae sobre la cresta de la otra y de igual modo los valles, lo cual da una interferencia constructiva total. La amplitud resultante es precisamente del doble de la de cualquier onda aislada. Si, en cambio, $\Delta\phi$ está cerca de 180°, la amplitud resultante es de casi cero (como se muestra en la figura 17b). Cuando $\Delta\phi$ es exactamente 180°, la cresta de una onda cae exactamente sobre el valle de la otra. La amplitud resultante es cero, correspondiente a la interferencia destructiva total.

Obsérvese que la ecuación 36 tiene siempre la forma de una onda sinusoidal. Así, al sumar dos ondas seno de la misma longitud de onda y amplitud se obtiene siempre una onda seno de longitud de onda idéntica. Podemos

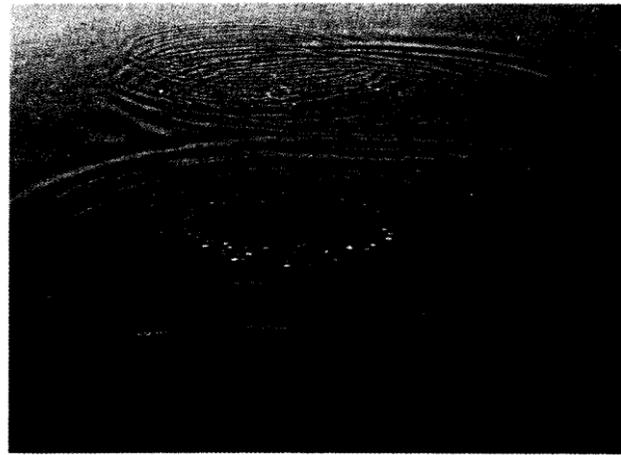


Figura 16 Dos trenes de ondas, en este caso rizos circulares de dos perturbaciones diferentes, interfieren al superponerse en puntos particulares. El desplazamiento en cualquier punto es la superposición de los desplazamientos por separado debidos a cada una de las dos ondas.

también sumar componentes que tengan la misma longitud de onda pero amplitudes diferentes. En este caso, la resultante es nuevamente una onda seno con idéntica longitud de onda, pero la amplitud resultante no tiene la forma simple dada por la ecuación 36. Si las amplitudes

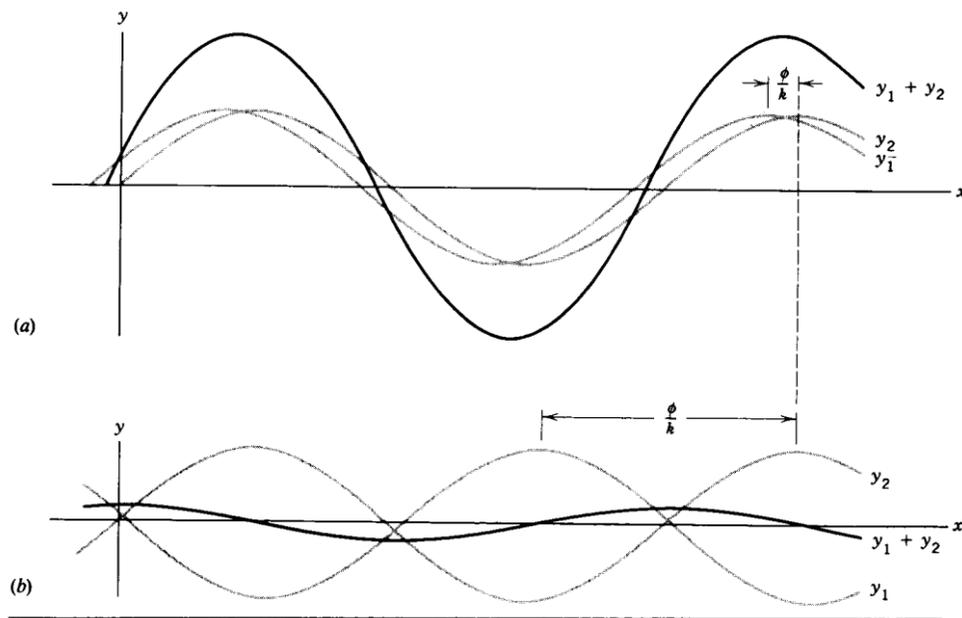


Figura 17 (a) La superposición de dos ondas de igual longitud de onda y amplitud que estén prácticamente en fase da por resultado una onda de casi el doble de la amplitud de cualquiera de las componentes. (b) La superposición de dos ondas de igual longitud de onda y amplitud que estén casi a 180° fuera de fase da por resultado una onda cuya amplitud es prácticamente cero. Nótese que la longitud de onda de la resultante no cambia en ninguno de los casos.

individuales son y_{1m} y y_{2m} , y, por lo tanto, las ondas están en fase ($\Delta\phi = 0$) la amplitud resultante es $y_{1m} + y_{2m}$ (Fig. 18), mientras que si están fuera de fase ($\phi = 180^\circ$), la amplitud resultante es $|y_{1m} - y_{2m}|$. En este caso, no puede existir una interferencia destructiva completa, aunque exista una interferencia destructiva parcial.

La figura 19 muestra un ejemplo de la presencia de los efectos de interferencia. Los altoparlantes funcionan por una misma fuente. En puntos equidistantes de las bocinas (sobre la línea AB , la cual representa a todo el plano medio), existe interferencia constructiva completa si las bocinas se accionan en fase ($\Delta\phi = 0$). Existen también otros puntos P a donde las ondas llegan en fase e interfieren constructivamente. Es decir, se puede desplazar una de las ondas de la figura 18 en una constante de fase de cualquier múltiplo entero de 2π (o en una distancia de cualquier número entero de longitudes de onda), y la forma de la onda combinada no cambia. Estos otros puntos de interferencia constructiva se localizan siempre donde la diferencia de la distancia desde las dos bocinas es un número entero de longitudes de onda:

$$|x_1 - x_2| = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots \quad (37)$$

En otros puntos P , las distancias diferentes x_1 y x_2 dan por resultado ondas que posiblemente lleguen a P fuera de fase, aunque hayan incluso comenzado en fase al salir de las bocinas. El entorno que constituye al auditorio podría, por lo tanto, tener "puntos muertos" en los que

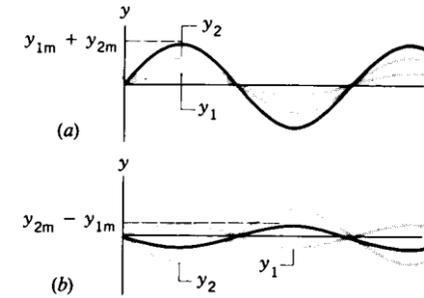


Figura 18 Suma de dos ondas de la misma longitud de onda y fase pero de diferentes amplitudes (líneas de menor intensidad) da una resultante de la misma longitud de onda y fase. (a) Las amplitudes se suman si las ondas están en fase, y (b) se restan si las ondas están 180° fuera de fase.

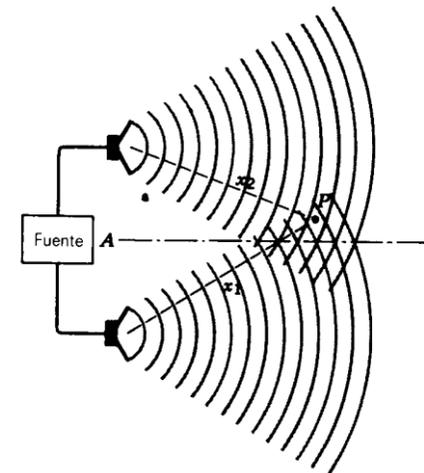


Figura 19 Dos altoparlantes, accionados por una fuente común, envían señales al punto P , donde éstas se interfieren.

existe interferencia destructiva parcial o completa para una longitud de onda λ en particular. La interferencia destructiva máxima se presenta en los puntos en que

$$|x_1 - x_2| = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2}, \dots, \quad (38)$$

correspondientes a una diferencia de fase de 180°, 540°, 900°, y así sucesivamente.

Por supuesto, si las bocinas emiten una mezcla de muchas longitudes de onda diferentes, ciertos puntos P podrían mostrar una interferencia destructiva para una longitud de onda y una interferencia constructiva para otra. El factor crítico en la determinación de las posiciones de los máximos y mínimos de la intensidad del sonido es la *diferencia de trayectoria* $|x_1 - x_2|$. En los puntos que no estén en el plano medio representado por la línea AB , las dos componentes llegan con amplitudes diferentes (porque las distancias desde las bocinas no son las mismas;

véase el problema muestra 3). No existirá entonces una interferencia destructiva completa. (En ciertas geometrías es posible que el sonido irradiado por la *parte trasera* de una bocina interfiera con el sonido irradiado por la *parte frontal*. Estas dos ondas están a 180° fuera de fase, y su interferencia puede reducir la intensidad del sonido en lugares frente a la bocina. Se han diseñado cajas de bocinas que eliminan este efecto.)

Problema muestra 4 Dos ondas viajan en la misma dirección a lo largo de una cuerda e interfieren entre sí. Las ondas tienen la misma longitud de onda y viajan con la misma velocidad. La amplitud de cada onda es de 9.7 mm, y existe una diferencia de fase de 110° entre ellas. (a) ¿Cuál es la amplitud de la onda combinada que resulta de la interferencia de las dos ondas? (b) ¿A qué valor se debería cambiar la diferencia de fase de modo que la onda combinada tenga una amplitud igual a la de una de las ondas originales?

Solución (a) La amplitud de la onda combinada se dio en la ecuación 36:

$$2y_m |\cos(\Delta\phi/2)| = 2(9.7 \text{ mm}) |\cos(110^\circ/2)| = 11.1 \text{ mm.}$$

(b) Si la cantidad $2y_m |\cos(\Delta\phi/2)|$ ha de ser igual a y_m , entonces debemos tener que

$$2|\cos(\Delta\phi/2)| = 1,$$

o sea

$$\Delta\phi = 2 \cos^{-1}(\frac{1}{2}) = 120^\circ \text{ or } -120^\circ.$$

Cualquier onda puede ir delante de la otra por 120° (más o menos cualquier múltiplo entero de 360°) para producir la onda combinada deseada.

Problema muestra 5 En la geometría de la figura 19, un oyente está sentado en un punto a una distancia de 1.2 m directamente enfrente de una bocina. Las dos bocinas, separadas por una distancia D de 2.3 m, emiten tonos puros de longitud de onda λ . Las ondas están en fase al salir de las bocinas. ¿Para qué longitudes de onda oírás el oyente un mínimo de intensidad del sonido?

Solución De acuerdo con los criterios de la ecuación 38, la intensidad mínima de sonido ocurre cuando las ondas de las dos bocinas se interfieren destructivamente. Si el oyente está sentado enfrente de la bocina 2, entonces $x_2 = 1.2 \text{ m}$, y x_1 puede hallarse a partir de la fórmula pitagórica,

$$x_1 = \sqrt{x_2^2 + D^2} = \sqrt{(1.2 \text{ m})^2 + (2.3 \text{ m})^2} = 2.6 \text{ m.}$$

Así, $x_1 - x_2 = 2.6 \text{ m} - 1.2 \text{ m} = 1.4 \text{ m}$, y, de acuerdo con la ecuación 38, tenemos que

$$1.4 \text{ m} = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \dots,$$

que corresponde a

$$\lambda = 2.8 \text{ m}, 0.93 \text{ m}, 0.56 \text{ m}, \dots$$

No ocurrirá una interferencia destructiva completa en esta posición, porque las dos ondas que llegan al punto de observación tienen amplitudes diferentes, siempre y cuando salgan de las bocinas con amplitudes iguales.

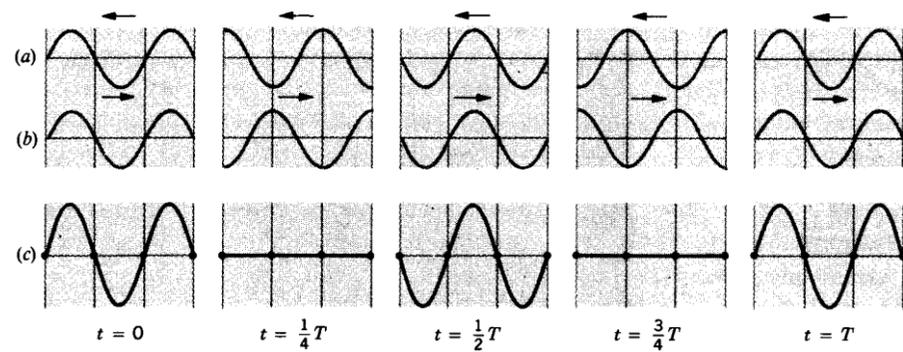


Figura 20 (a, b) Dos ondas viajeras de la misma longitud de onda y amplitud, se mueven en direcciones opuestas. (c) La superposición de las dos ondas en instantes de tiempo diferentes. Los nodos del patrón de onda estacionaria se hallan indicados por puntos gruesos. Nótese que las ondas viajeras no tienen nodos.

19-9 ONDAS ESTACIONARIAS

En la sección anterior considerábamos el efecto de superponer dos ondas componentes de igual amplitud y frecuencia que se mueven en la misma dirección en una cuerda. ¿Cuál es el efecto cuando las ondas se mueven a lo largo de la cuerda en direcciones *opuestas*?

La figura 20 es una indicación gráfica del efecto de sumar las formas de onda componentes para obtener la resultante. En la figura se muestran dos ondas viajeras, una moviéndose hacia la izquierda y la otra hacia la derecha. Se muestran “instantáneas” de las dos ondas componentes y su resultante en intervalos de $\frac{1}{4}$ de periodo.

De esta superposición resulta una característica particular: existen ciertos puntos a lo largo de la cuerda, llamados *nodos*, en los cuales el desplazamiento es nulo *en todo momento*. (La figura 18 muestra también ciertos puntos en los que la resultante tenía un desplazamiento nulo, pero esa figura representaba una instantánea de las ondas viajeras *en un momento particular*. Si tomásemos otra instantánea un momento más tarde, hallaríamos que aquellos puntos ya no tienen desplazamiento nulo, porque la onda está viajando. En la figura 20c, los ceros permanecen como ceros en todo momento.) Entre los nodos se hallan los *antinodos*, donde el desplazamiento oscila con la amplitud más grande. Tal patrón de nodos y antinodos se denomina *onda estacionaria*.

Para analizar matemáticamente a la onda estacionaria, representemos a las dos ondas por

$$y_1(x,t) = y_m \text{ sen } (kx - \omega t),$$

$$y_2(x,t) = y_m \text{ sen } (kx + \omega t).$$

De aquí que la resultante se pueda expresar como:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$= y_m \text{ sen } (kx - \omega t) + y_m \text{ sen } (kx + \omega t) \quad (39)$$

o, haciendo uso de la relación trigonométrica de la ecuación 35,

$$y(x,t) = [2y_m \text{ sen } kx] \cos \omega t. \quad (40)$$

La ecuación 40 es la ecuación de una onda estacionaria. No puede representar a una onda viajera, porque x y t no aparecen en la combinación $x - vt$ o $x + vt$ exigida por una onda viajera.

Nótese que una partícula en cualquier posición x determinada ejecuta un movimiento armónico simple en el transcurso del tiempo, y que todas las partículas vibran con la misma frecuencia angular ω . En una onda viajera cada partícula de la cuerda vibra con la misma amplitud. Sin embargo, en una onda estacionaria, *la amplitud no es la misma para todas las partículas sino que varía con la posición x de la partícula*. De hecho, la amplitud $|2y_m \text{ sen } kx|$, tiene un valor *máximo* de $2y_m$ en las posiciones donde

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

o bien

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots \quad (41)$$

Estos puntos son los antinodos y están separados por $\frac{1}{2}$ de longitud de onda. La amplitud tiene un valor *mínimo* de cero en las posiciones donde

$$kx = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

o bien

$$x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots \quad (42)$$

Estos puntos son los nodos y están también separados por $\frac{1}{2}$ de longitud de onda. La separación entre un nodo y un antinodo adyacente es de $\frac{1}{4}$ de longitud de onda.

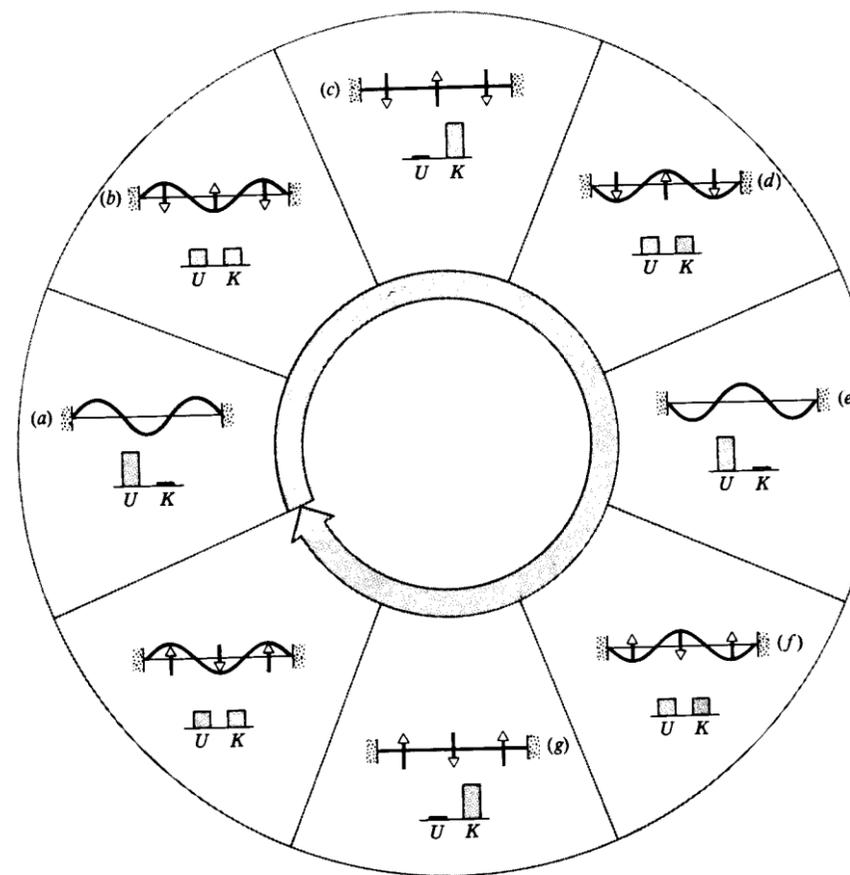


Figura 21 Onda estacionaria en una cuerda tensa que muestra un ciclo de oscilación. En (a) la cuerda está momentáneamente en reposo con los antinodos en su desplazamiento máximo. La energía de la cuerda es energía potencial elástica totalmente. (b) Un octavo de ciclo más tarde, el desplazamiento se reduce y la energía es parcialmente potencial y parcialmente cinética. Los vectores muestran las velocidades instantáneas de las partículas de la cuerda en ciertas posiciones. (c) El desplazamiento es cero; no existe energía potencial, y la energía cinética es máxima. Las partículas de la cuerda tienen sus velocidades máximas. (d - h) El movimiento continúa a través del resto del ciclo, transformándose continuamente la energía en las formas cinética y potencial.

Está claro que no se transporta energía a lo largo de la cuerda hacia la derecha o hacia la izquierda, ya que la energía no puede fluir más allá de los nodos de la cuerda, los cuales están permanentemente en reposo. De aquí que la energía permanezca “estacionaria” en la cuerda, si bien alterna entre energía cinética vibratoria y energía potencial elástica. Cuando los antinodos están todos en sus desplazamientos máximos, la energía se almacena enteramente como energía potencial, en especial como una energía potencial elástica asociada al estiramiento de la cuerda. Cuando todas las partes de la cuerda pasan simultáneamente por la posición de equilibrio (como en la segunda y cuarta instantáneas de la Fig. 20), la energía se almacena enteramente como energía cinética. La figura 21 muestra una descripción más detallada de la transformación de la energía entre las formas potencial y cinética durante un ciclo de oscilación. Compárese la figura 21 con la figura 6 del capítulo 8 para el sistema oscilatorio bloque-resorte. ¿En qué se parecen estos sistemas?

Podemos considerar de igual manera al movimiento como una oscilación de la cuerda como un todo, experimentando cada partícula un movimiento armónico simple de frecuencia angular ω y con una amplitud que depende

de su posición. Cada pequeña parte de la cuerda tiene inercia y elasticidad, y la cuerda en su conjunto puede verse como una colección de osciladores acoplados. De aquí que la cuerda vibratoria sea lo mismo en principio que el sistema bloque-resorte, excepto que el sistema bloque-resorte tiene únicamente una frecuencia natural, y la cuerda vibratoria tiene un gran número de frecuencias naturales (véase la sección 19-10).

Una manera fácil de conseguir una onda estacionaria consiste en superponer a una onda que viaje por una cuerda con su onda reflejada que viaje en la dirección opuesta. Consideremos ahora más detenidamente el proceso de reflexión de una onda. Supongamos una pulsación que viaje por una cuerda tensa que está fija en un extremo, como se muestra en la figura 22a. Cuando la pulsación llega a ese extremo, ejerce una fuerza hacia arriba sobre el apoyo. El apoyo es rígido, sin embargo, y no se mueve. Según la tercera ley de Newton, el apoyo ejerce una fuerza igual sobre la cuerda pero directamente opuesta. Esta fuerza de reacción genera una pulsación en el apoyo, el cual viaja de regreso a lo largo de la cuerda en dirección opuesta a la de la pulsación incidente. Decimos que la pulsación incidente ha sido *reflejada* en el punto extremo fijo de la cuerda. Nótese que la pulsación reflejada regresa

con su desplazamiento transversal invertido. Si un tren de ondas es incidente en el punto extremo fijo, se genera un tren de ondas reflejado en ese punto de la misma manera. El desplazamiento de cualquier punto a lo largo de la cuerda es la suma de los desplazamientos causados por las ondas incidente y reflejada. Puesto que el punto extremo está fijo, estas dos ondas deben interferir entre sí siempre destructivamente en ese punto, de modo que el desplazamiento será nulo allí. De aquí que la onda reflejada esté siempre 180° fuera de fase con la onda incidente en un extremo fijo. *Al reflejarse en un extremo fijo, una onda transversal experimenta un cambio de fase de 180° .*

En la figura 22b se representa la reflexión de una pulsación en un extremo libre de una cuerda tensa, es decir, en el extremo que tiene libertad de moverse transversalmente. El extremo de la cuerda está unido a un aro muy ligero que puede deslizarse libremente sin fricción a lo largo de una barra transversal. Cuando la pulsación llega al extremo libre, ejerce una fuerza sobre el elemento de la cuerda allí situado. Este elemento se acelera, y (como en el caso de un péndulo) su movimiento lo lleva más allá del punto de equilibrio; se "pasa de largo" y ejerce una fuerza de reacción sobre la cuerda. Esto genera una pulsación que viaja de regreso a lo largo de la cuerda en dirección opuesta a la de la pulsación incidente. Una vez más tenemos una reflexión, pero ahora en un extremo libre. El extremo libre sufrirá obviamente el desplazamiento máximo de las partículas de la cuerda; un tren de ondas incidente y otro reflejado deben interferir constructivamente en ese punto si han de tener un máximo allí. De aquí que la onda reflejada esté siempre en fase con la onda incidente en ese punto. *En un extremo libre, una onda transversal se refleja sin cambiar de fase.*

La figura 23 muestra exposiciones de tiempo de los patrones de onda estacionaria que pueden obtenerse al sacudir una cuerda tensa que esté fija en un extremo.

Hasta ahora hemos supuesto que la onda se refleja en el extremo sin pérdida de intensidad. En la práctica encontramos que existe siempre una reflexión parcial y una transmisión parcial en cualquier frontera entre dos medios; por ejemplo, si observamos un trozo de vidrio de ventana ordinario, podemos ver que parte de la luz se refleja de regreso hacia uno y parte se transmite a través del vidrio. Podemos demostrar este efecto con ondas transversales en cuerdas amarrando juntas dos cuerdas de densidades de masa diferentes. Cuando una onda que viaja a lo largo de las cuerdas llega al punto en que las cuerdas están unidas, parte de la energía de la onda se transmite a la otra cuerda y parte se refleja de regreso. La amplitud de la onda reflejada es menor que la amplitud de la onda incidente original, porque la onda transmitida a la segunda cuerda transporta parte de la energía incidente.

Si la segunda cuerda tiene una densidad de masa mayor que la primera, la onda reflejada de regreso hacia la primera cuerda sufre aún un cambio de fase de 180° al ser

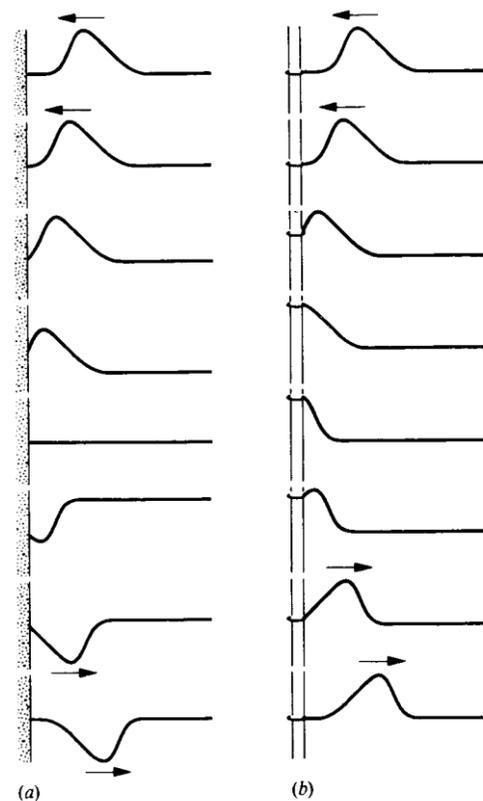


Figura 22 (a) Una pulsación transversal incidente desde la derecha se refleja por una pared rígida. Nótese que la fase de la pulsación reflejada se invierte o se cambia en 180° . (b) Aquí el extremo de la cuerda puede moverse con libertad, estando unida la cuerda a un aro que puede deslizarse libremente a lo largo de la barra. La fase de la pulsación reflejada no cambia.

reflejada. Pero a causa de que su amplitud es menor que la de la onda incidente, el punto frontera no es un nodo y se mueve. Ocurre así una transferencia neta de energía a lo largo de la primera cuerda hacia la segunda. Si la segunda cuerda tiene una densidad de masa menor que la primera, ocurre una reflexión parcial sin cambio de fase, pero una vez más se transmite energía hacia la segunda cuerda. En la práctica, la mejor manera de comprobar un "extremo libre" en una cuerda consiste en amarrarla a otra cuerda larga y mucho más ligera. La energía transmitida es despreciable, y la segunda cuerda sirve para mantener la tensión en la primera.

Nótese que la onda transmitida viaja con una velocidad diferente de la de las ondas incidente y reflejada. La velocidad de la onda está determinada por la relación $v = \sqrt{F/\mu}$; la tensión es la misma en ambas cuerdas, pero sus densidades son diferentes. De aquí que la onda viaje más lentamente en la cuerda más densa. La frecuencia de la onda transmitida es la misma que la de las ondas incidente y reflejada. (Si no fuera esto así, existiría una

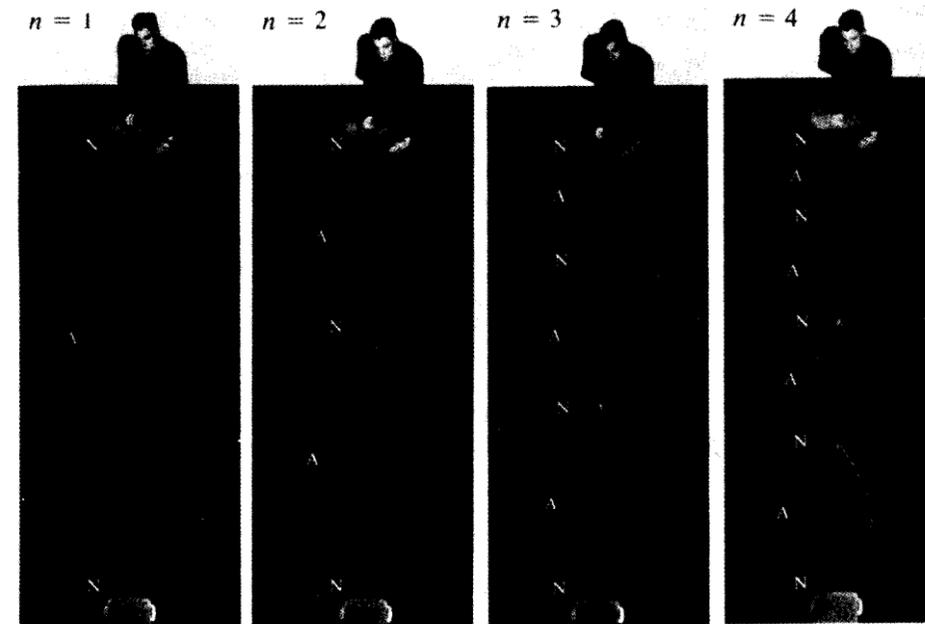


Figura 23 Un estudiante sacude una cuerda tensa (en realidad un tubo de hule) a cuatro frecuencias resonantes, produciendo cuatro patrones diferentes de ondas estacionarias.

discontinuidad en el punto en que las cuerdas están unidas.) Las ondas, que tienen la misma frecuencia pero viajan con velocidades diferentes, tienen longitudes de onda diferentes. Partiendo de la relación $\lambda = v/v$, concluimos que la longitud de onda es más corta en la cuerda más densa, donde v es más pequeña. Este fenómeno de cambio de longitud de onda al pasar la onda de un medio a otro lo encontraremos con frecuencia en nuestro estudio de las ondas de luz. También se presenta en las ondas de sonido: una cuerda, como la de una guitarra, vibra con cierta frecuencia y cierta longitud de onda; la onda transmitida al aire tiene la misma frecuencia que la de la cuerda, pero una longitud de onda diferente, debido a que la velocidad de las ondas de la cuerda difiere de su velocidad en el aire.

19-10 RESONANCIA

Veamos de nuevo los patrones de la onda estacionaria de la figura 23. Podemos ver que pueden presentarse cuatro ondas estacionarias diferentes. El espaciamiento entre los nodos difiere en los cuatro patrones, y puesto que la longitud de onda es el doble de la distancia entre nodos adyacentes, la longitud de onda difiere también. Por otra parte, la velocidad de fase es la misma en las cuatro situaciones, estando determinada únicamente por la tensión de la cuerda. La relación $v = \lambda\nu$ nos dice entonces que si v es constante y λ cambia, la frecuencia ν debe ser ciertamente diferente para las diferentes ondas estacionarias. En las fotografías, el estudiante debe estar por lo tanto sacudiendo la cuerda a ciertas frecuencias diferentes pero bien definidas.

Las fotos de la figura 23 parecen mostrar un sistema con nodos en ambos extremos. (Si el estudiante está sacudiendo la cuerda en un extremo, lo hace con una amplitud muy pequeña de modo que el extremo sea aproximadamente un nodo.) El espaciamiento entre nodos es siempre de la mitad de la longitud de onda, de modo que la condición para que en la cuerda se produzca una onda estacionaria es que la longitud L de la cuerda sea igual a un número entero n de medias longitudes de onda:

$$L = n \frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

o bien

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (43)$$

En términos de la frecuencia, podemos escribir la ecuación 43 como:

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (44)$$

Es decir, el estudiante debe sacudir la cuerda a estas frecuencias particulares (correspondiendo a $n = 1, 2, 3, 4$) para producir las ondas estacionarias.

Podemos considerar que las frecuencias de la ecuación 44 son las *frecuencias naturales* del sistema oscilatorio (la cuerda). Cuando la frecuencia de la fuerza impulsora (la mano del estudiante) concuerda con las frecuencias naturales permitidas, se produce una onda estacionaria y el sistema comienza a moverse con una gran amplitud. Ésta es la condición de *resonancia* que estudiamos anteriormente en la sección 15-9.

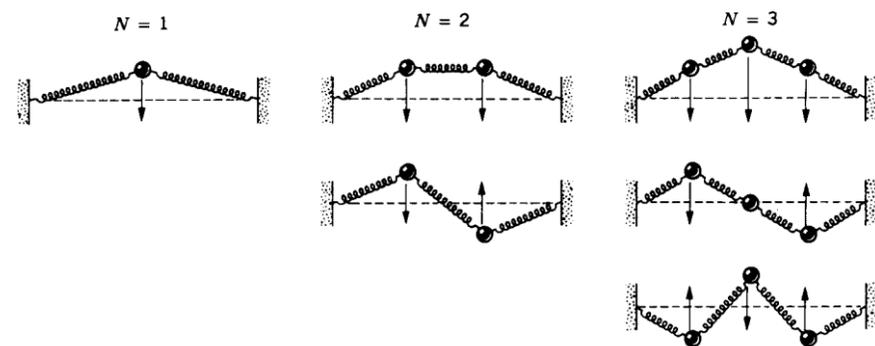


Figura 24 Algunos patrones de oscilación de un oscilador que tiene elementos concentrados, estando conectados los cuerpos oscilatorios en este caso mediante resortes de masa despreciable. Cada patrón de movimiento diferente tiene una frecuencia natural diferente, siendo el número de frecuencias naturales igual al número de cuerpos oscilatorios.

Un bloque colgado de un resorte es también capaz de resonar, pero únicamente a una sola frecuencia. ¿Por qué entonces tiene la cuerda tensa un número infinito de frecuencias resonantes? En el sistema bloque-resorte la inercia (el bloque) está concentrada (“amontonada”) en una parte del sistema mientras que la elasticidad (el resorte) está concentrada en otra. Se dice que tal sistema resonante tiene elementos *concentrados*. Por otra parte, se dice que la cuerda tensa tiene elementos *distribuidos*, porque cada parte de la cuerda tiene propiedades tanto inerciales como elásticas. Son muchas las formas posibles en que la cuerda puede almacenar sus energías cinética y potencial, en contraste con sólo una única manera en el sistema bloque-resorte. Un sistema concentrado de N objetos tiene N frecuencias naturales, cada una de las cuales corresponde a un patrón de oscilación diferente (Fig. 24). El límite cuando N tiende al infinito nos conduce al sistema completamente distribuido de la cuerda tensa, con su número infinito de frecuencias resonantes.

Si la cuerda vibratoria de la figura 23 se pusiera en movimiento y luego se dejara sola, las vibraciones desaparecerían en forma gradual. El movimiento de la cuerda está amortiguado por la disipación de energía a través de los soportes en los extremos y por la resistencia del aire al movimiento. Para mantener la vibración, el estudiante debe suministrar cierta energía al sistema aplicando una fuerza impulsora. Cuando la frecuencia impulsora es muy diferente a la de las frecuencias resonantes, la onda reflejada hace que la cuerda efectúe un trabajo sobre la mano del estudiante; de esta manera, la cuerda pierde energía, a lo que hay que añadir la pérdida por amortiguamiento. En la resonancia, el movimiento de la mano del estudiante está en fase con el de la cuerda, y la cuerda no pierde energía a causa del trabajo efectuado sobre la mano del estudiante. Toda la energía suministrada por el estudiante, menos la pérdida por amortiguamiento, se almacena en la

oscilación, y el resultado es un movimiento de una gran amplitud. Finalmente, se llega a una situación estable en la que la energía suministrada por la fuerza impulsora equilibra exactamente las pérdidas debidas al amortiguamiento.

Este movimiento es análogo al del oscilador armónico amortiguado que hemos estudiado en la sección 15-9. La frecuencia resonante es casi, pero no exactamente, una frecuencia natural de la cuerda. Los nodos aparentes no son verdaderos nodos, porque la energía debe estar fluyendo por ellos a lo largo de la cuerda para compensar las pérdidas debidas al amortiguamiento. Si no existiera un amortiguamiento, la frecuencia resonante sería exactamente una frecuencia natural, y la amplitud aumentaría sin límite al continuar siendo suministrada energía a la cuerda. Finalmente, se excedería el límite elástico y la cuerda se rompería. (El límite elástico puede excederse aunque haya amortiguamiento presente, como se mostró en la figura 21 del capítulo 15.)

Si el estudiante sacude la cuerda con una frecuencia que difiera de una de las frecuencias naturales del sistema, la onda reflejada regresa a la mano del estudiante fuera de fase con el movimiento de la mano. En este caso, la cuerda efectúa un trabajo sobre la mano, en adición al que la mano efectúa sobre la cuerda. No se produce ningún patrón fijo de onda estacionaria. La amplitud del movimiento resultante es pequeña y no muy diferente a la del movimiento de la mano del estudiante. Esta situación es análoga al movimiento errático de un columpio que sea impulsado con una frecuencia diferente a la natural; el desplazamiento resultante del columpio es bastante pequeño.

En la resonancia, la cuerda absorbe tanta energía como puede de la mano del estudiante. Esto sucede así en todo sistema vibratorio. Al sintonizar un aparato de radio, la frecuencia natural de un circuito electrónico se cambia

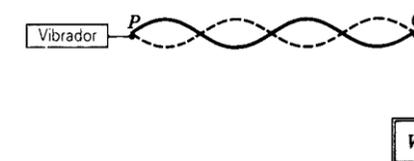


Figura 25 Problema muestra 6. Una cuerda sometida a tensión está conectada a un vibrador. A una frecuencia fija del vibrador, los patrones de la onda estacionaria ocurrirán para ciertos valores discretos de la tensión en la cuerda.

las tres longitudes de onda más largas de las resonancias de la cuerda? (b) ¿Cuáles son las longitudes de onda correspondientes que llegan al oído del oyente?

Solución (a) Las longitudes de onda resonantes de una cuerda de longitud $L = 0.34$ m pueden hallarse directamente de la ecuación 43:

$$\lambda_1 = 2L/1 = 2(0.34 \text{ m}) = 0.68 \text{ m},$$

$$\lambda_2 = 2L/2 = 0.34 \text{ m},$$

$$\lambda_3 = 2L/3 = 0.23 \text{ m}.$$

(b) Cuando una onda pasa de un medio (la cuerda) a otro (el aire) de velocidad de onda diferente, la frecuencia permanece igual, pero la longitud de onda cambia. La ecuación 19 da la relación entre las longitudes de onda. Para hallar la velocidad de onda de la cuerda, observamos que en el modo resonante más bajo $v = 440$ Hz y $\lambda = 0.68$ m, de modo que

$$v = v\lambda = (440 \text{ Hz})(0.68 \text{ m}) = 299 \text{ m/s}.$$

En el aire, la velocidad de la onda es de 343 m/s, y partiendo de la ecuación 19 obtenemos

$$\lambda_{\text{aire}} = \lambda_{\text{cuerda}} \frac{v_{\text{aire}}}{v_{\text{cuerda}}} = \lambda_{\text{cuerda}} \frac{343 \text{ m/s}}{299 \text{ m/s}} = 1.15\lambda_{\text{cuerda}}.$$

Entonces hallamos que las longitudes de onda en el aire son:

$$\lambda_1 = 0.78 \text{ m}, \quad \lambda_2 = 0.39 \text{ m}, \quad \lambda_3 = 0.26 \text{ m}.$$

hasta que concuerda con una frecuencia particular de las ondas de radio que estén siendo transmitidas por la estación. En ese momento el circuito resuena con la señal y absorbe tanta energía de la señal como puede. Otras condiciones de resonancia similares se presentan en el sonido, el electromagnetismo, la óptica, y las físicas atómica y nuclear.

En el capítulo siguiente consideraremos con mayor detalle la importancia de la resonancia para entender las propiedades de diferentes instrumentos musicales y la manera en que se producen sus sonidos característicos. Si bien en esta sección hemos utilizado una cuerda vibrante como ejemplo de un sistema vibratorio, los principios estudiados aquí se aplican a todos los sistemas vibratorios que puedan mantener un movimiento ondulatorio.

Problema muestra 6 En el arreglo de la figura 25, un vibrador pone en movimiento a la cuerda con una frecuencia de 120 Hz. La cuerda tiene una longitud de $L = 1.2$ m, y su densidad de masa lineal es de 1.6 g/m. ¿A qué valor debe ajustarse la tensión (aumentando el peso colgante) para obtener el patrón de movimiento de cuatro rizados?

Solución Para hallar la tensión, podemos sustituir a la ecuación 18 por la ecuación 44 y obtener

$$F = \frac{4L^2v^2\mu}{n^2}.$$

Se encuentra que la tensión correspondiente a $n = 4$ (para cuatro rizados) es

$$F = \frac{4(1.2 \text{ m})^2(120 \text{ Hz})^2(0.0016 \text{ kg/m})}{4^2} = 8.3 \text{ N}.$$

Esto corresponde a un peso colgante de unas 2 lb.

Problema muestra 7 Una cuerda de violín sintonizada en la nota *la* (440 Hz) tiene una longitud de 0.34 m. (a) ¿Cuáles son

PREGUNTAS

- ¿Cómo podría usted probar experimentalmente que la energía se halla asociada a una onda?
- La energía puede transferirse por partículas y por ondas. ¿Cómo podemos distinguir experimentalmente entre estos métodos de transferencia de la energía?
- ¿Puede generarse un movimiento ondulatorio en el que las partículas del medio vibren con un movimiento angular armónico simple? De ser así, explique cómo y describa la onda.
- Al analizar el movimiento de una onda elástica a través de un medio material, a menudo despreciamos la estructura molecular de la materia. ¿Cuándo se justifica esto y cuándo no?
- ¿Cómo varían la amplitud y la intensidad de las ondas de la superficie del agua con la distancia desde la fuente?
- ¿Cómo podemos crear ondas planas? ¿Y ondas esféricas?
- Al pasar un bote de motor crea una estela que causa ondas que bañan la orilla. Al paso del tiempo, el periodo de las ondas que llegan se hace cada vez más corto. ¿Por qué?
- Las siguientes funciones en las que A es una constante son de la forma $y = f(x \pm vt)$:

$$y = A(x - vt), \quad y = A(x + vt)^2,$$

$$y = A\sqrt{x - vt}, \quad y = A \ln(x + vt).$$

Explique por qué estas funciones no son útiles en el movimiento ondulatorio.

- ¿Puede uno producir en una cuerda una forma de onda que tenga una discontinuidad en la pendiente en un punto, es decir, una esquina aguda? Explique.
- La ley del cuadrado inverso no se aplica exactamente a la disminución de la intensidad de los sonidos con la distancia. ¿Por qué?
- Cuando dos ondas interfieren entre sí, ¿altera una el progreso de la otra?
- Cuando dos ondas interfieren entre sí, ¿existe pérdida de energía? Explique su respuesta.
- ¿Por qué no observamos efectos de interferencia entre los haces de luz emitidos por dos lámparas de mano o entre las ondas de sonido emitidas por dos violines?
- Como lo muestra la figura 20, la configuración de las ondas estacionarias en una cuerda tensa es una línea recta dos veces durante el ciclo, exactamente como sería si la cuerda no vibrara en absoluto. Explique desde el punto de vista de la conservación de la energía.
- Dos ondas de la misma amplitud y frecuencia están viajando en la misma cuerda. En cierto momento la cuerda se asemeja a una línea recta. ¿Viajan las dos ondas necesariamente en la misma dirección? ¿Cuál es la relación de fase entre las dos ondas?
- Si dos ondas difieren únicamente en amplitud y se propagan en direcciones opuestas a través de un medio, ¿producirán ondas estacionarias? ¿Se transporta energía? ¿Existen nodos?
- La reflexión parcial de la energía ondulatoria a causa de discontinuidades en la trayectoria de transmisión es usualmente disipante y puede reducirse a un mínimo por medio de la inserción de aparatos de "igualación de la impedancia" entre las secciones de la trayectoria que limitan con la discontinuidad. Por ejemplo, un megáfono ayuda a

igualar la columna de aire de boca y garganta con el aire afuera de la boca. Dé otros ejemplos y explique cualitativamente cómo tales aparatos minimizan las pérdidas por reflexión.

- Considere que las ondas estacionarias de una cuerda son una superposición de ondas viajeras y explique, usando ideas de superposición, por qué no existen nodos reales en la cuerda resonante de la figura 25, ni siquiera en el extremo "fijo". (Sugerencia: Considere los efectos del amortiguamiento.)
- Las ondas estacionarias de una cuerda se demuestran por medio de un arreglo como el de la figura 25. La cuerda es iluminada por una lámpara fluorescente y el vibrador está impulsado por la misma toma eléctrica que energiza a la lámpara. La cuerda exhibe una variación curiosa del color en dirección transversal. Explique.
- En la discusión sobre las ondas transversales de una cuerda, hemos tratado únicamente con desplazamientos en un solo plano, el plano xy . Si todos los desplazamientos están en un plano, se dice que la onda es *planamente polarizada*. ¿Pueden existir desplazamientos en otro plano que aquél con el que tratamos? De ser así, ¿pueden combinarse las ondas polarizadas en dos planos diferentes? ¿Qué apariencia tendría tal combinación de ondas?
- Una onda transmite energía. ¿Transfiere ímpetu? ¿Puede transferir ímpetu angular? (Véase "Energy and Momentum Transport in String Waves", por D. W. Juenker, *American Journal of Physics*, enero de 1976, pág. 94).
- En el terremoto de la Ciudad de México ocurrido el 19 de septiembre de 1985, se alternaron zonas de mucho daño con zonas de poco daño. También, los edificios de entre 5 y 15 pisos de altura sufrieron el daño mayor. Explique estos efectos en términos de las ondas estacionarias y de la resonancia.

por $u_{\max} = \omega y_m$, y (b) que la aceleración transversal máxima es $a_{\max} = \omega^2 y_m$.

- La ecuación de una onda transversal que viaja a lo largo de una cuerda está dada por

$$y = (2.30 \times 10^{-3}) \sin(18.2x - 588t),$$

donde x y y están en metros y t está en segundos. Halle (a) la amplitud, (b) la frecuencia, (c) la velocidad, (d) la longitud de onda de la onda, y (e) la velocidad transversal máxima de una partícula de la cuerda.

- La ecuación de una onda transversal que viaja a lo largo de una cuerda muy larga está dada por $y = 6.0 \sin(0.020\pi x + 4.0\pi t)$, donde x y y están expresadas en centímetros y t en segundos. Calcule (a) la amplitud, (b) la longitud de onda, (c) la frecuencia, (d) la velocidad, (e) la dirección de propagación de la onda, y (f) la velocidad transversal máxima de una partícula de la cuerda.
- Calcule la velocidad de una onda transversal en una cuerda de 2.15 m de longitud y 62.5 g de masa bajo una tensión de 487 N.
- La velocidad de una onda de una cuerda es 1 de 72 m/s cuando la tensión es de 123 N. ¿En qué valor deberá ser aumentada la tensión con objeto de elevar la velocidad de la onda a 180 m/s?
- Demuestre que, en términos del esfuerzo de tensión S y de la densidad de masa ρ , la velocidad v de las ondas transversales de un alambre está dada por $v = (S/\rho)^{1/2}$.
- La ecuación de una onda transversal de una cuerda es $y = 1.8 \sin(23.8x + 317t)$, donde x está en metros, y está en milímetros, y t en segundos. La cuerda está sometida a una tensión de 16.3 N. Halle la densidad de masa lineal de la cuerda.
- Una onda sinusoidal continua viaja por una cuerda con una velocidad de 82.6 cm/s. Se halla que el desplazamiento de las partículas de la cuerda en $x = 9.60$ cm varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación $y = 5.12 \sin(1.16 - 4.08t)$, donde y está en centímetros y t en segundos. La densidad de masa lineal de la cuerda es de 3.86 g/cm. (a) Halle la frecuencia de la onda. (b) Halle la longitud de onda de la onda. (c) Escriba la ecuación general que da el desplazamiento transversal de las partículas de la cuerda en función de la posición y del tiempo. (d) Calcule la tensión en la cuerda.

- Una onda transversal armónica simple se está propagando a lo largo de una cuerda hacia la izquierda (ó $-x$). La figura 26 muestra un trazo del desplazamiento en función de la posición en el tiempo $t = 0$. La tensión de la cuerda es de 3.6 N y su densidad lineal es de 25 g/m. Calcule (a) la amplitud, (b) la longitud de onda, (c) la velocidad de la onda, (d) el periodo, y (e) la velocidad máxima de una partícula de la cuerda. (f) Escriba una ecuación que describa a la onda viajera.
- Pruebe que la pendiente de una cuerda en cualquier punto es numéricamente igual a la razón entre la velocidad de la partícula y la velocidad de la onda en ese punto.
- Para una onda en una cuerda tensa, halle la razón entre la velocidad máxima de una partícula (la velocidad máxima con la cual una sola partícula del cordón se mueve trans-

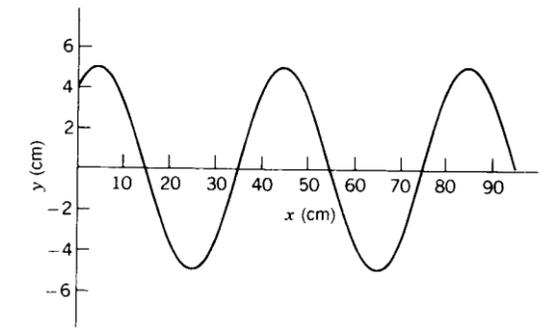


Figura 26 Problema 15.

versalmente a la onda) y la velocidad de la onda. Si una onda que tiene cierta frecuencia y cierta amplitud actúa sobre un cordón, ¿dependería esta razón de velocidades del material de que esté hecha la cuerda, por ejemplo de alambre o de nylon?

- En la figura 27a, la cuerda #1 tiene una densidad de masa lineal de 3.31 g/m, y la cuerda #2 tiene una densidad de masa lineal de 4.87 g/m. Están bajo tensión debido al bloque colgante de masa $M = 511$ g. (a) Calcule la velocidad de la onda en cada cuerda. (b) El bloque se divide ahora en dos bloques (siendo $M_1 + M_2 = M$) y el aparato se modifica como se muestra en la figura 27b. Halle M_1 y M_2 , de modo que las velocidades de onda de las dos cuerdas sean iguales.

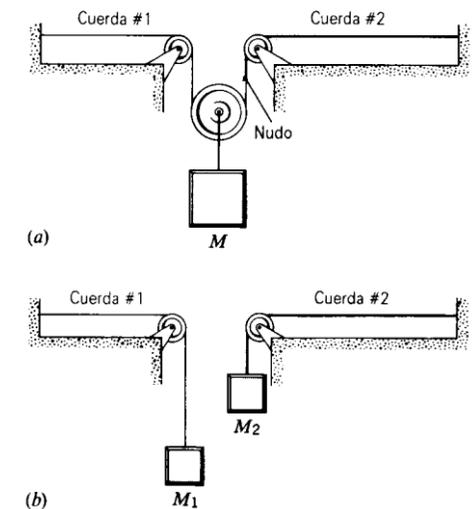


Figura 27 Problema 18.

- Un alambre de 10.3 m de longitud y una masa de 97.8 g se estira bajo una tensión de 248 N. Si se generan dos pulsaciones, separadas en tiempo por 29.6 ms, una en cada extremo del alambre, ¿en dónde se encuentran las pulsaciones?
- Halle la velocidad de la onda transversal más rápida que puede ser enviada a lo largo de un alambre de acero.

PROBLEMAS

Sección 19-3 Ondas viajeras

- Una onda tiene una velocidad de onda de 243 m/s y una longitud de onda de 3.27 cm. Calcule (a) la frecuencia y (b) el periodo de la onda.
- Al mecer un bote, un niño produce ondas de agua en la superficie de un lago previamente tranquilo. Se observa que el bote produce 12 oscilaciones en 30 s y también que la cresta de una onda determinada llega en 5 s a la orilla, que está alejada 15 m. Halle (a) la frecuencia, (b) la velocidad, y (c) la longitud de onda de las ondas.
- Una onda sinusoidal viaja a lo largo de una cuerda. El tiempo para que un punto en particular se mueva desde el desplazamiento máximo hasta el desplazamiento cero es de 178 ms. La longitud de onda de la onda es de 1.38 m. Halle (a) el periodo, (b) la frecuencia, y (c) la velocidad de la onda.

- Escriba una expresión que describa a una onda transversal que viaje a lo largo de una cuerda en la dirección $+x$ con una longitud de onda de 11.4 cm, una frecuencia de 385 Hz, y una amplitud de 2.13 cm.
- Escriba la ecuación de una onda que viaje en dirección negativa a lo largo del eje x y tenga una amplitud de 1.12 cm, una frecuencia de 548 Hz, y una velocidad de 326 m/s.
- Una onda de 493 Hz de frecuencia tiene una velocidad de 353 m/s. (a) ¿A qué distancia entre sí están dos puntos que difieran en fase por 55.0° ? (b) Halle la diferencia de fase entre dos desplazamientos en el mismo punto pero en tiempos que difieran en 1.12 ms.

Sección 19-4 Velocidad de onda

- Demuestre (a) que la velocidad transversal máxima de una partícula de una cuerda debida a una onda viajera está dada

Permitiendo un factor de seguridad razonable, el esfuerzo máximo de tensión al que podrían estar sujetos los alambres de acero es de 720 MPa. La densidad del acero es de 7.80 g/cm³. Demuestre que la respuesta no depende del diámetro del alambre.

21. El tipo de banda de hule empleado en el interior de algunas bolas de béisbol y de algunas pelotas de golf obedece la ley de Hooke dentro de un amplio intervalo de elongaciones de la banda. Un segmento de este material tiene una longitud L sin estirar y una masa m . Cuando se aplica una fuerza F , la banda se estira una longitud adicional ΔL . (a) ¿Cuál es la velocidad (en términos de m , ΔL , y la constante de fuerza k) de las ondas transversales en esta banda de hule? (b) Usando la respuesta de (a), demuestre que el tiempo requerido para que una pulsación transversal viaje la longitud de la banda de hule es proporcional a $1/\sqrt{\Delta L}$ si $\Delta L \ll L$ y es constante si $\Delta L \gg L$.
22. Un cable uniforme de masa m y longitud L cuelga de un techo. (a) Demuestre que la velocidad de una onda transversal en el cable es una función de y , la distancia desde el extremo inferior, y está dada por $v = \sqrt{gy}$. (b) Demuestre que el tiempo que le toma a una onda transversal viajar la longitud del cable está dada por $t = 2\sqrt{L/g}$. (c) ¿Afecta la masa real del cable a los resultados de (a) y de (b)?
23. Un alambre no uniforme de longitud L y masa M tiene una densidad de masa lineal variable dada por $\mu = kx$, donde x es la distancia desde un extremo del alambre y k es una constante. (a) Demuestre que $M = kL^2/2$. (b) Demuestre que el tiempo t requerido para que una pulsación generada en un extremo del alambre viaje hasta el otro extremo está dado por $t = \sqrt{8ML/9F}$, donde F es la tensión en el alambre.
24. Un aro de cuerda circular y uniforme gira en sentido horario en ausencia de la gravedad (véase la Fig. 28). La velocidad tangencial es v_0 . Halle la velocidad de las ondas en esta cuerda. (Nota: La respuesta es independiente del radio del aro y de la densidad de masa lineal de la cuerda.)



Figura 28 Problema 24.

Sección 19-6 Potencia e intensidad en el movimiento ondulatorio

25. Una cuerda de 2.72 m de longitud tiene una masa de 263 g. La tensión en la cuerda es de 36.1 N. ¿Cuál debe ser la frecuencia de las ondas viajeras de amplitud de 7.70 mm para que la potencia promedio transmitida sea de 85.5 W?
26. Una fuente lineal emite una onda cilíndrica expansiva. Suponiendo que el medio no absorbe energía, encuentre (a) cómo dependen la intensidad y (b) la amplitud de la onda de la distancia medida desde la fuente.
27. Una onda se propaga uniformemente en todas direcciones desde un punto fuente. (a) Justifique la expresión para el

desplazamiento y del medio a una distancia r desde la fuente:

$$y = \frac{Y}{r} \sin k(r - vt).$$

Considere la velocidad, dirección de propagación, periodicidad e intensidad de la onda. (b) ¿Qué dimensiones tiene la constante Y ?

28. Un observador mide una intensidad de 1.13 W/m² a una distancia desconocida medida desde una fuente de ondas esféricas cuya potencia de salida es también desconocida. El observador camina 5.30 m acercándose a la fuente y mide entonces una intensidad de 2.41 W/m² en esta nueva posición. Calcule la potencia de salida de la fuente.
29. (a) Muestre que la intensidad I es el producto de la densidad de energía u (energía por unidad de volumen) y la velocidad de propagación v de una perturbación ondulatoria; o sea muestre que $I = uv$. (b) Calcule la densidad de energía en una onda de sonido a 4.82 km de una sirena de 47.5 kW, suponiendo que las ondas son esféricas, la propagación isotrópica sin haber una absorción atmosférica, y que la velocidad del sonido es de 343 m/s.
30. Una onda sinusoidal transversal se genera en un extremo de una cuerda larga, horizontal por una barra que se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo de una distancia de 1.12 cm. El movimiento es continuo y se repite regularmente 120 veces por segundo. La cuerda tiene una densidad lineal de 117 g/m y se mantiene bajo una tensión de 91.4 N. Halle (a) el valor máximo de la velocidad transversal u y (b) el valor máximo de la componente transversal de la tensión. (c) Demuestre que los dos valores máximos calculados arriba ocurren a los mismos valores de fase de la onda. ¿Cuál es el desplazamiento transversal y de la cuerda en estas fases? (d) ¿Cuál es la potencia máxima transferida a lo largo de la cuerda? (e) ¿Cuál es el desplazamiento transversal y para las condiciones bajo las cuales ocurre esta transferencia máxima de potencia? (f) ¿Cuál es la transferencia mínima de potencia a lo largo de la cuerda? (g) ¿Cuál es el desplazamiento transversal y para las condiciones bajo las cuales ocurre esta transferencia mínima de potencia?

Sección 19-8 Interferencia de ondas

31. ¿Qué diferencia de fase entre dos ondas transversales por lo demás idénticas, que se mueven en la misma dirección a lo largo de una cuerda tensa, resultará en la onda combinada que tenga una amplitud de 1.65 veces la de la amplitud común de las dos ondas componentes? Exprese la respuesta tanto en grados como en radianes.
32. Determine la amplitud de la onda resultante cuando se combinan dos ondas sinusoidales que tengan la misma frecuencia y viajen en la misma dirección, si sus amplitudes son de 3.20 cm y 4.19 cm y difieren en fase en $\pi/2$ rad.
33. Dos pulsaciones están viajando a lo largo de una cuerda en direcciones opuestas, como se muestra en la figura 29. (a) Si la velocidad de onda es de 2.0 m/s y las pulsaciones tienen una separación de 6.0 cm, trace los patrones des-

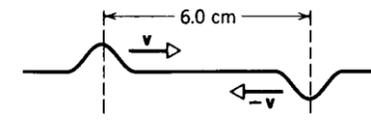


Figura 29 Problema 33.

pués de 5.0, 10, 15, 20, y 25 ms. (b) ¿Qué le ha sucedido a la energía en $t = 15$ ms?

34. Tres ondas sinusoidales viajan en dirección x positiva a lo largo de la misma cuerda. Las tres ondas tienen la misma frecuencia. Sus amplitudes están en la razón $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ y sus ángulos de fase son $0, \pi/2, \text{ y } \pi$, respectivamente. Trace la forma de onda resultante y discuta su comportamiento al crecer t .
35. Cuatro ondas sinusoidales viajan en la dirección positiva de x a lo largo de la misma cuerda. Sus frecuencias están en la razón $1:2:3:4$ y sus amplitudes en la razón $1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$, respectivamente. Cuando $t = 0$, en $x = 0$, la primera y la tercera onda están 180° fuera de fase con la segunda y la cuarta. Trace la forma de onda resultante cuando $t = 0$ y discuta su comportamiento al crecer t .
36. Considere dos fuentes puntuales S_1 y S_2 en la figura 30, las cuales emiten ondas de la misma frecuencia y amplitud. Las ondas se inician con la misma fase, y esta relación de fase en las fuentes se mantiene a través del tiempo. Considere puntos P en los cuales r_1 sea casi igual a r_2 . (a) Demuestre que la superposición de estas dos ondas produce una onda cuya amplitud y_m varía con la posición P aproximadamente de acuerdo con

$$y_m = \frac{2Y}{r} \cos \frac{k}{2}(r_1 - r_2),$$

donde $r = (r_1 + r_2)/2$. (b) Demuestre luego que la cancelación total ocurre cuando $r_1 - r_2 = (n + \frac{1}{2})\lambda$, siendo n cualquier entero, y que el refuerzo total ocurre cuando $r_1 - r_2 = n\lambda$. El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia en distancia desde dos puntos fijos es constante es una hipérbola, siendo los puntos fijos los focos. De aquí que cada valor de n produzca una línea hiperbólica de interferencia constructiva y una línea hiperbólica de interferencia destructiva. En los puntos en que r_1 y r_2 no son aproximadamente iguales (como cerca de las fuentes), las amplitudes de las ondas de S_1 y S_2 difieren y las cancelaciones son solamente parciales. (Ésta es la base del sistema de navegación OMEGA.)

37. Una fuente S y un detector D de ondas de alta frecuencia están a una distancia d en el suelo. Se detecta que la onda dirigida desde S está en fase en D con la onda que parte de S , que se refleja por una capa horizontal situada a una altitud H (Fig. 31). Los rayos incidente y reflejado forman el mismo ángulo con la capa reflectora. Cuando la capa se eleva una distancia h , no se detecta ninguna señal en D . Desprecie la absorción de la atmósfera y halle la relación entre d, h, H , y la longitud de onda λ de las ondas.
38. Refiérase al problema 37 y a la figura 31. Suponga que $d = 230$ km y $H = 510$ km. Las ondas son ondas de radio de 13.0 MHz ($v = 3.00 \times 10^8$ m/s). En el detector D la

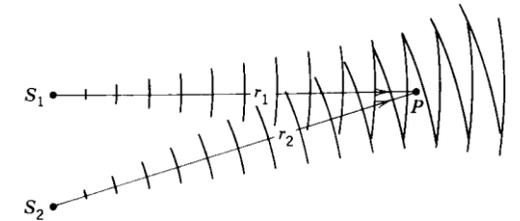


Figura 30 Problema 36.

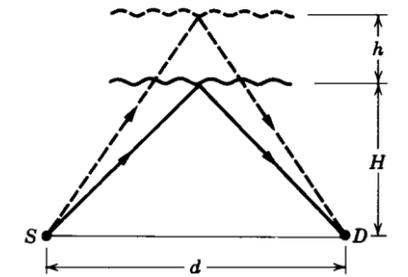


Figura 31 Problemas 37 y 38

intensidad de la señal combinada varía desde un máximo hasta cero y regresa de nuevo a un máximo seis veces en 1 minuto. ¿Con qué velocidad vertical se está moviendo la capa reflectora? (La capa se mueve lentamente, de modo que la distancia vertical desplazada en 1 min es pequeña en comparación con H y d .)

Sección 19-9 Ondas estacionarias

39. Una cuerda fija en ambos extremos tiene una longitud de 8.36 m y una masa de 122 g. Está sujeta a una tensión de 96.7 N y se pone en vibración. (a) ¿Cuál es la velocidad de las ondas en la cuerda? (b) ¿Cuál es la longitud de onda de la onda estacionaria más larga posible? (c) Indique la frecuencia de esa onda.
40. Una cuerda de guitarra de nilón tiene una densidad de masa lineal de 7.16 g/m y está bajo una tensión de 152 N. Los soportes fijos están separados por 89.4 cm. La cuerda vibra según el patrón de onda estacionaria que se muestra en la figura 32. Calcule (a) la velocidad, (b) la longitud de onda, y (c) la frecuencia de las ondas componentes cuya superposición da lugar a esta vibración.
41. La ecuación de una onda transversal que viaja en una cuerda está dada por

$$y = 0.15 \sin(0.79x - 13t),$$
 donde x y y están expresadas en metros y t en segundos. (a) ¿Cuál es el desplazamiento en $x = 2.3$ m, $t = 0.16$ s? (b) Escriba la ecuación de una onda que, cuando se suma a la dada, produciría ondas estacionarias en la cuerda. (c) ¿Cuál es el desplazamiento de la onda estacionaria resultante en $x = 2.3$ m, $t = 0.16$ s?
42. Una cuerda vibra según la ecuación

$$y = 0.520 \sin(1.14x) \cos(137t),$$